Upplaga: 2018-10-24-180

GE SVAR PÅ TAL

En inledande kurs i matematisk analys

David Rule

Utdelad till: D, IT, och U (HT2018) (dituh180)

Innehåll

Introduktion

Innan vi börjar kursen är det viktigt att jag påpekar skillnaden mellan den här kursen och matematikkurserna ni har med all sannolikhet läst tidigare. Ni har kanske redan hunnit läsa innehållsförteckningen och märkt att ni känner till det mesta av vad som finns där. Det kan vara vilseledande: Kursen är inte en repetition av det ni har redan lärt sig. Däremot kan erfarenheten och intuitionen ni har byggt upp vara till stor nytta. Så vad är skillnaden då?

I grundskolan och gymnasiet har ni koncentrerat er på metoder, det vill säga på hur man kan komma fram till de rätta svaren till numeriska frågor. Mindre betoning var lagt på varför en viss metod funkar eller hur man kommer fram till en viss metod från början. Sådan infallsvinkel är nödvändigt när man börjar läsa matematik. Barn lär sig genom exempel som är grundade i deras närmaste omgivning. Deras logiska tänkande motsvarar hur de tänkte när de lär sig ett språk: De lyssnar, repeterar och bygger upp en intuition som funkar bra i vardagslivet. Det kallas för *induktiv slutledning*.

Men i grunden är matematik inget språk. Ett ord kan ändra sin betydelse så länge tillräcklig många människor använder ordet på något nytt sätt. Men det stämmer inte för matematik: Matematik är en övning i *deduktiv slutledning*. Det krävs att vi preciserar begreppen vi pratar om så gott vi kan, vara tydligt över vilka reglar gäller och i vilka sammanhang, och sen bevisar vi slutsatser utifrån bara de där begreppen och reglarna. Det ska vi försöka göra i den här kursen. Man kan säga att det motsvarar något hur man lära sig ett *främmande* språk.

Utöver det ska vi diskutera hur vi presenterar våra lösningar och bevis till varandra. Om vi kan inte kommunicera matematiska argument till andra har vi inte kommit någonstans. Ni kommer snart upptäcka att det är inte så lätt att skriva en logiskt argument som man skulle kunna tro. Grundläggande begrepp är särskilt svårt att definiera och vi kommer inte lyckas härleda alla matematik från axiomen, men syftet är att ni blir mer medveten av vad är ett rimligt logiskt argument för någonting och blir bättre att upptäcka fel i ett argument.

Syftet med allt det här är att lära oss bli bättre problemlösare. Om vi aldrig tar steget från induktiv till deduktiv logik så är det svårare att lösa problem som igen har löst tidigare. Det blir svårare att utveckla nya metoder och vara säkert att det vi kommer på är rätt. De flesta av er som läser kursen utbildar sig för att bli problemlösare i någon form så ni kommer ha stor nytta inte bara kursens innehåll med fram för allt av hur ni kommer lära sig tänka.

Korsreferenser

Anteckningarna och uppgifterna uppdelas i modulerna A till G. Varje modul har två avsnitt, A.1 och A.2 till exempel. I anteckningarna kan de avsnitt uppdelas vidare i eventuella underavsnitt, så A.1 uppdelas till exempel i A.1.1 och A.1.2. Uppgifter betecknas på ett liknande sätt till underavsnitt med för att skilja mellan uppgifter och underavsnitt vi använder oss av ett bindestreck istället för en punkt, så B.1-5 är till exempel en uppgift i avsnitt B.1 av uppgiftsamlingen. Ekvationer, påståenden och liknande betecknas på ett liknande sätt fast inom parentes, så (C.18) hänvisar till en ekvation i modul C i anteckningarna men (D-1) är en ekvation i modul D i uppgiftsamlingen.

MODUL A

Logik och aritmetik

A.1 Logik och räkneoperationer

A.1.1 Logik

Framför allt är matematik ett sätt att tänka. Den är förstås ett ämne där man funderar på tal och mönster men en matematiker använder deduktiva slutledningar för att upptäcka sanningar om världen. För att förstå matematik är det viktigt att man förstår deduktion. I det här avsnittet tittar vi lite närmare på logiska argument, hur man bygger dem och hur de kan gå fel. Aven om det är svårare att komma i gång på detta sätt kommer man längre än man skulle kunna tro.

Vi kommer att betrakta många påståenden. Ett *påstående* är en mening som kan vara antingen sann eller falsk. Till exempel:

Jag har en dotter; (A.1)

Köpenhamn är Danmarks huvudstad; eller (A.2)

Köpenhamn ligger i Tanzania. (A.3)

Vi vet alla att (A.2) är sant och (A.3) är falskt. Sanningen av (A.1) beror på vem som säger det, men vid alla tillfällen är det antingen sant eller falskt.

Om man vet eller antar att några påståenden är sanna (så kallade *antaganden* eller *axiom*) så kan man använda deduktiva slutledningar för att bygga nya påståenden som också är sanna när antagandena stämmer (och kallade *slutsatser*):

Sveriges riksdag ligger i Sveriges huvudstad.
Sveriges huvudstad kallas för Stockholm.
Därför ligger Sveriges riksdag i Stockholm.

Men vi måste vara försiktiga att undvika ogiltiga argument:

Alla fåglar lägger ägg.
Kackerlackor lägger ägg.
Därför är kackerlackor fåglar.

Att alla fåglar lägger ägg medför inte att alla djur som lägger ägg är fåglar. Ibland kan det vara svårt att se problemet i ett argument:

Alla människor som föddes i Paris föddes i Frankrike.
Jean Paige föddes i Paris.
Därför föddes Jean Paige i Frankrike.

Det ser rimligt ut, men Jean Paige föddes faktiskt i USA. Problemet ligger i vad vi tror ordet "Paris" syfta på. I första påstående menar vi Frankrikes huvudstad, men i det andra påståendet pratar vi om Paris, Illinois. Båda antagandena är sanna men enkla att misstolka.

Från enkla påståenden kan man bygga mer komplicerade påståenden: Om två påstående är sanna kan vi lägga ihop dem med ordet "och":

Jag bor på landet.
Jag jobbar i stan.
Därför bor jag på landet och jobbar i stan.

Om det finns två eller flera alternativa kan man använder "eller":

Jag äter potatis eller ris till middag. (A.4)

Negation är ett förnekande av ett påstående. Till exempel, negationen av (A.3) är:

Köpenhamn ligger utanför Tanzania.

Ibland när vi försöker förneka ett påstående ser vi att det inte var så tydligt som vi trodde. Till exempel är negationen av (A.1) kunde vara:

Jag har ingen dotter; (A.5)

eller,

Jag har antingen ingen dotter eller mer än en dotter.

Rent logiskt är (A.5) negationen av (A.1). Men förvirring kan uppstå på grund hur vi brukar tolka saker som (A.1). I vardagspråk skulle det vara konstigt att gömma man har flera barn än man säger, men rent logiskt (A.1) säger "Jag har minst en dotter" så det är helt möjligt att ha fler. Det finns massor av exempel från vardagslivet när vi använder logiskt språk på ett icke-logiskt sätt: För många finns det en viss tröst i faktumet att

"Om du älskade mig skulle du aldrig glömma min födelsedag"

är igen logisk implikation. Inom logik (och matematik) måste vi hålla oss till det som verkligen sägas och slipper de underförstådda delar så mycket vi kan! Jämför (A.1) med det följande påståendet:

Martin har en penna.

Här skulle ingen tänker det var konstigt om Martin hade flera pennor även om han bara sa han har en. I det här fallet vardagstolkningen stämmer överens med den logistiska. Skillnader kan också uppstå i användning av ordet "eller" jämfört med talspråket: Rent logiskt utesluter (A.4) inte att man äter både potatis och ris, fast det är inte så ofta man äter båda i samma rätt. Inom logik den *svaga disjunktionen*—det vill säga, minst en av alternativen—uttrycks med "eller" medan den *starka disjunktionen*—precis en av alternativen—uttrycks med "antingen. . . eller". Om du skriver någonting du tror kan misstolkas så är det bäst att förtydliga.

För två påståenden A och B skriver vi "$A \implies B$" för att säga "*A medför B*". Det är ekvivalent med att säga "*B medförs av A*", eller "$B \impliedby A$". Men observera att det är inte det samma som "$B \implies A$": Att jag har en syster medför att jag har ett syskon, men att jag har ett syskon medför inte att jag har en syster—mitt syskon kan vara en hane. Om $A \implies B$ och $B \implies A$ skriver vi "$A \iff B$".

(dituh180)

För ett påstående A skriver vi $\neg A$ för negationen av A. Till exempel:

$$A = \text{"Varje land har en flagga."}$$
$$\neg A = \text{"Det finns ett land som inte har någon flagga."}$$

Påståendet "$\neg B \implies \neg A$" är *kontrapositionen* av "$A \implies B$". Både påståendena är logiska ekvivalent, det vill säga "$A \implies B$" om och endast om "$\neg B \implies \neg A$". Till exempel:

Om batteriet tar slut funkar inte min mobiltelefon;

är ekvivalent med

Om min mobiltelefon funkar så har batteriet inte tagit slut.

Nu ska vi gå igenom ett par exempel. För att dela upp texten lite tydligare när vi skriver svaret använder vi oss av en rubrik i kursivstil "*Svar*" som säger svaret börjar. Och slutar med en lite fyrkant "□" som säger svaret är klart.

Exempel A.1 (Negation)**.** *Vilket av de följande påståenden är negationen till*

$$\text{"Alla fåglar äter frön".} \tag{A.6}$$

(a) "Igen fågel äter frön."

(b) "Det finns minst en fågel som äter frön."

(c) "Alla frön äter fåglar."

(d) "Det finns minst en fågel som inte äter frön."

Svar: Vi vill lista ut vilket påstående är ekvivalent med "Inte alla fåglar äter frön", det vill säga negationen av (A.6).

Om igen fågel äter frön så är (A.6) falskt, men det är inte det enda sätt att (A.6) kan vara falsk. Till exempel om det finns både fåglar som äter frön och fåglar som inte äter frön så är (A.6) igen falsk. Det vill säga (a) $\implies \neg$(A.6) men motsatta implikationen är falsk. Därför är (a) inte negationen till (A.6).

Om alla fåglar äter frön så finns det minst en fågel som äter frön och i så fall är både (A.6) och (b) sanna. Om det finns både fåglar som äter frön och fåglar som inte äter frön, då är (A.6) falskt och (b) sant. Därför har sanningen av (b) inget att göra med sanningen av (A.6) och därför kan (b) inte vara negationen av (A.6).

Påståendet (c) låter lite konstigt. Vi har bara bytt plats av subjektet och objektet i satsen. Vad frön gör med fåglar har inget direkt logiskt att göra med vad fåglar gör med frön och därför är (c) inte negationen av (A.6).

Det finns bara en möjlighet kvar. Om det finns minst en fågel som inte äter frön så är (A.6) falskt. Om (A.6) är falskt så finns det minst en fågel som inte äter frön. Därför är påståendet (d) negationen av (A.6). □

Observera att det kan finnas olika omskrivningar av samma ett påstående. Påståendet "Inte alla fåglar äter frön" är negationen av (A.6) *likväl som (d). Alla påståenden som är ekvivalenta med* $\neg$(A.6) *kallas för en negation av* (A.6)*.*

Exempel A.2 (Kontraposition)**.** *Ge kontrapositionen av påståendet*

$$\begin{array}{l}\textit{"Om man körde från Linköping till Stockholm i mindre än 1 timme}\\ \textit{och 40 minuter har man brutit mot hastighetsbegränsningen."}\end{array} \tag{A.7}$$

`(dituh180)`

Svar: Vi kan skriva (A.7) i formen $A \implies B$ där

$$A = \text{"Man körde från Linköping till Stockholm i mindre än 1 timme och 40 minuter."}$$

och

$$B = \text{"Man har brutit mot hastighetsbegränsningen."}$$

Vi behöver skriva negationen av både A och B:

$$\neg A = \text{"Man körde från Linköping till Stockholm i 1 timme och 40 minuter eller längre."}$$
$$\neg B = \text{"Man har inte brutit mot hastighetsbegränsningen."}$$

Därför är kontropositionen av (A.7)

> "Om man har inte brutit mot hastighetsbegränsningen körde man från Linköping till Stockholm i 1 timme och 40 minuter eller längre."

□

Återigen finns det flera omskrivningar som är ekvivalenta. Till exempel får vi likväl skriva "Om man har inte brutit mot hastighetsbegränsningen tog man längre än 1 timmer och 40 minuter att köra från Linköping till Stockholm" som kontrapositionen av (A.7)*. Man får även fundera över vad är implicit i frågaställningen. Ett sätt att inte uppfyller A är att inte köra från Linköping till Stockholm allas. Ingår det i hur vi formulerade* $\neg A$*?*

A.1.2 Hur man skriver argument inom matematik

Man kan säga att matematik är en tillämpning av logik. Man kan tänka att verkligheten är ett mörkt rum och matematisk logik är en ficklampa som visar oss vad som finns i rummet. Genom att skriva ner påståendena ritar vi en karta över rummet. Ficklampan är jättebra att avslöja enskilda föremål men kartan ger oss en bättre bild över hela rummet.

Till skillnad från en ficklampa kan det vara svårt att avslöja vad som finns i rummet. Till exempel, några geometriska problem som betraktades i antiken löstes först under 1800-talet.[1]

Varje påstående i matematik följs av ett logiskt argument från grundläggande begrepp, så kallade *axiom* som man antar utan frågor. I appendix 2 kan man titta lite närmare på axiomen som räcker för att räkna med tal, men det är inte huvudsytet av kursen. I det där avsnitt tänker vi på hur man beskriver våra matematiska tankar för andra.

Vi antar att man redan är van vid enkla räkneoperationer med tal och förstår likhet och olikhet mellan tal. I figur A.1 finns det en påminnelsetabell om grundläggande notation vi använder oss av genom texten.

Enkla regler

Betrakta de följande enkla påståendena som ni har säkert använt er av någon gång i livet:

$$(a+b)c = ac + bc, \tag{A.8}$$
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{och} \tag{A.9}$$
$$a < b \implies ac < bc \tag{A.10}$$

[1] Till exempel, cirkelns kvadratur (`https://sv.wikipedia.org/wiki/Cirkelns_kvadratur`) och vinkelns tredelning (`https://sv.wikipedia.org/wiki/Vinkelns_tredelning`).

	Begrepp	Notation	Betydelse
Relationer	Likhet	$a = b$	'a är lika med b'
	Olikhet	$a \neq b$	'a är inte lika med b'
		$a < b$	'a är strängt mindre än b'
		$a > b$	'a är strängt större än b'
		$a \leq b$	'a är mindre än eller lika med b'
		$a \geq b$	'a är större än eller lika med b'
Operationer	Addition	$a + b$	'a plus b'
	Subtraktion	$a - b$	'a minus b'
	Multiplikation	ab, $a \times b$ eller $a \cdot b$	'a gånger b'
	Division	a/b, $\frac{a}{b}$ eller $a \div b$	'a delat med b'
	Kvadrering	a^2	'a gånger a'

Figur A.1: Notation för att anteckna relationer mellan och operationer på två tal a och b. Man använder också parentes '(' och ')' för att markera en operatorprioritet som skiljer sig från den vanlig: multiplikation och division först, sen addition och subtraktion.

där a, b och c är godtyckliga tal.

Likheten (A.8) är en enkel aritmetisk regel och behövs inte förklara ytterligare i kursen.[2]

Likheten (A.9) är enkel—Det finns inget enklare sätt att skriva om en operation som agerar på en summa än att sätta den på varsin term, eller hur?—men tyvärr är det inte sant. Om varken a eller b är noll får vi inte likhet i (A.9). Det kan vi bevisa med hjälpen av riktiga aritmetiska regler: Vi vet att $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ så (A.9) stämmer om och endast om $a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2$. Sista likheten är ekvivalent med $2ab = 0$ och den gäller om och endast om minst en av a och b är noll. Eftersom (A.9) gäller bara i exceptionella omständigheter det är ingen idé att betrakta det som en giltig regel.

Ibland är (A.10) sant, men inte alltid. Till exempel $5 < 9$ men $5(-4) = -20 \not< -36 = 9(-4)$.[3] Implikationen (A.10) är sant så länge $c > 0$. Eftersom (A.10) gäller i en ganska bred belägenhet är det bra att komma ihåg den. Men det är oerhört viktigt att vi både kollar hypotesen $c > 0$ gäller och påpekar det i texten varje gång vi använder (A.10) i ett argument.

Lösningar till ekvationer

Ibland använder vi giltiga argument och reglar men ändå går vilse. Det är inte alltid enkelt att förstår var det är vi har bevisat. En vanlig exempel är när vi löser ekvationer. Betrakta följande systemet av två ekvationer:

$$\begin{aligned} x + 4 &= 3 \quad \text{och} \\ x - 4 &= 5. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Vi kan addera båda vänsterleden ihop och det måste vara lika med summan av högerleden: det ger oss

$$\begin{aligned} (x + 4) + (x - 4) &= 3 + 5 \\ \implies 2x &= 8 \end{aligned}$$

och därifrån dra vi slutsatsen att $x = 4$. Kort sagt har vi bevisat

$$(A.11) \implies x = 4.$$

[2]Det är inte precis en axiom enligt avsnitt 2 i appendixet, men det följer från de: se exempel 2.6.

[3]Tecknet $\not<$ betyder "ej mindre än" och liknade för andra tecken, t.ex. $\not\Rightarrow$, o.s.v.

Så kan vi dra slutsatsen att $x = 4$ är en lösning till (A.11)?

Nej, det kan vi inte: Vi kan kolla direkt om $x = 4$ är en lösning genom att sätta det i (A.11). Vi kollar att $x = 4$ medför att $x + 4 = 8 \neq 3$ och även $x - 4 = 0 \neq 5$ så (A.11) stämmer inte. Vi har bevisat att

$$x = 4 \;\not\Longrightarrow\; \text{(A.11)}.$$

Har någonting gått fel då? Man kan kolla alla aritmetiska operationer vi har använt oss av och vi har inte gjort någonting fel. Problemet ligger i hur vi har tolkat våra slutsatser. Att skriva "(A.11) $\implies x = 4$" säger egentligen att

"Om det finns en lösning x till (A.11) så måste den vara 4."

Genom att räkna med (A.11) antar vi implicit att det finns minst ett x som uppfyller (A.11). Så 4 är bara en kandidat till en lösning x. Men i det här fallet finns det ingen lösning alls till (A.11) och det är har vi bekräftat genom att sätta in $x = 4$ (som vi vet nu är den enda möjligheten) i (A.11).

Om vi löser varsin ekvation separat är det kanske enklare att ser: $x + 4 = 3 \implies x = -1$ och $x - 4 = 5 \implies x = 9$. Eftersom vi kan inte har $x = -1$ och $x = 9$ samtidigt finns det ingen lösning.

Vad händer om vi byter ut ordet "och" i (A.11) med "eller"? Är $x = 4$ en lösning då?

Exempel A.3. *Hitta alla lösningar till följande systemet av ekvationer:*

$$\begin{aligned} x(x+4) &= -4 \quad \textit{och} \\ x(x-4) &= 12. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Svar: Vi räknar precis som ovan och addera båda ekvationer ihop:

$$\begin{aligned} x(x+4) + x(x-4) &= -4 + 12 \\ \implies 2x^2 &= 8 \\ \implies x^2 &= 4 \end{aligned}$$

Vi kommer prata mer om lösningarna x till ekvationer av formen $x^2 = c$ i modul D, men just nu kan vi ta det som givet att alla lösningar till $x^2 = 4$ är $x = 2$ och $x = -2$. Därför har vi bevisat

$$\text{(A.12)} \implies x = 2 \text{ eller } x = -2.$$

Vi testar om de är lösningar genom att sätta in de i (A.12): Om $x = -2$ är $x(x + 4) = (-2)(-2 + 4) = -4$ och $x(x - 4) = (-2)(-2 - 4) = 12$ så (A.12) stämmer. Om $x = 2$ är $x(x + 4) = 2(2 + 4) = 12$ och $x(x - 4) = 2(2 - 4) = -4$ så (A.12) gäller inte.

Slutsatsen är då att $x = -2$ är den enda lösningen till (A.12). □

Definitioner och satser

Det skulle vara oerhört tråkigt och långsamt att bevisa alla nya påstående från enkel aritmetik, så istället bygger vi upp olika användbara påståenden som vi noggrant bevisar med hjälp av grundläggande aritmetik tillsammans med påståendena vi har bevisat tidigare. Ett viktigt påståendet i matematik kallas för en *sats*. Genom att skriva upp och bevisa satser sparar man tid, men minst lika viktigt är att man skapar någon slags intuition över ämnet. Många slutsatser är enklare att se som följder av allmänna reglar och principer än att bevisa direkt från axiomen i enskilda fall. Vi formulerar också *definitioner* för att införa nya begrepp eller ord som är nyttiga i en viss sammanhang. På så sätt är det mer tydligt vad vi menar när vi använder ämnesspecifika ord, det är enklare att kontrollera vad sägs och det minskar förvirring och tvetydighet.

Nu går vi genom ett exempel, som förhoppningsvis gör idéer tydligare. Vi börjar med en definition.

Definition A.4. *Givet två positiva heltal n och m kallar vi r* resten *av n delat med m om*

$$n = qm + r \quad \text{för något positiva heltal } q \tag{A.13}$$

där r är ett heltal sådant att $0 \le r < m$.[4]

Terminologien i definition A.4 är lite tydligare om vi skriver (A.13) i den ekvivalenta formen $n/m = q + r/m$.

Nu vet vi precis betydelsen av ordet *rest* och kan gå vidare och undersöka egenskapen hos tal. Näst upptäcker vi en sats som är långt ifrån uppenbar utan ett bevis. Det handlar om begreppet rest vi har definierat i definition A.4 samt de grundläggande begrepp positiva tal, olikhet och division.

Sats A.5. *Betrakta tre positiva heltal n_1, n_2 och m sådana att:*

1. *n_1 delat med m har rest 1; och*
2. *n_2 delat med m har rest 1.*

Då är resten av produkten $n_1 n_2$ delat med m också 1.

Precis som vi gjorde i exemplen ovan börjar vi beviset en rubrik i kursivstil "*Bevis*" och i slutet kommer en lite fyrkant "□" som säger beviset är klart.

Bevis: Eftersom n_1 delat med m har rest 1 vet vi från (A.13) att det finns ett positivt heltal q_1 så att

$$n_1 = q_1 m + 1.$$

Eftersom n_2 delat med m har rest 1 vet vi också från (A.13) att det finns ett positivt heltal q_2 så att

$$n_2 = q_2 m + 1.$$

Därför kan vi dra slutsatsen att

$$n_1 n_2 = (q_1 m + 1)(q_2 m + 1) = (q_1 q_2 m + q_1 + q_2)m + 1,$$

så (A.13) i Definition A.4 uppfylles med $n = n_1 n_2$, $q = (q_1 q_2 m + q_1 + q_2)$ och $r = 1$ som är alla förstås hela tal. Dessutom eftersom 1 är, till exempel, resten av n_1 delat med m så är $0 \le 1 < m$. Därför uppfyller 1 alla krav från definition A.4 att vara resten av $n_1 n_2$ delat med m. □

Observera att rent logiskt är det okej att använda antagandena från satsen i sitt bevis, men inte slutsatsen! Den måste bevisas utan att använda någonting vi har inte bevisat tidigare. I beviset har vi använt oss av bara egenskapen (A.13) från definition A.4 som gäller enligt satsens antaganden 1 och 2.

Till sist observera att vi skriver matematik i hela meningar. Visst använder vi också mycket matematisk notation för att skriva snabbt och tydligt, men det kan inte ersätta vanliga ord helt och hållet. Ord hjälper oss att förstå vad det är man antar, hur man går från ett steg till det andra och vad det är man drar för slutsatser. Utan den förklaringen skulle argumentet vara otydligt. Det samma gäller när man löser uppgifter eller problem i arbetslivet. Det är helt okej att skriva korta anteckningar för att själv förstå problem eller förklara för en vän medan ni sitter och pratar, men det räcker inte som en fullständigt lösning om man inte kan läsa den och förstå utan föregående kunskap om problemet. För att veta om det du har skrivit räcker som en fullständigt lösning, tänk om du skulle kunna vara nöjd om du läste den som en lösning i en lärobok. Där har man ingen möjlighet att utvidga lösningen med ytterligare förklaringar, så allt måste finnas redan i texten. Färdigheten att förklara sina tankar skriftligt är en viktigt del av en universitetsutbildning.

[4] När man skriva två olikhet eller likhet tillsammans det betyder att båda gäller samtidigt: så här till exempel $0 \le r$ och $r < m$.