Inledande matematisk analys

1.

Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{R}\setminus\{7\} \to M$, där $M \subseteq \mathbf{R}$, som är definierad enligt uttrycket

$$f(x) = \frac{4x-3}{x-7}.$$

(a) Utred vad mängden M måste vara så att f är bijektiv.

(b) Ge ett uttryck för $f^{-1}(y)$ som gäller för alla $y \in M$, där M är ditt svar till (a).

Solution:

(a) Vi räknar

$$y = f(x) = \frac{4x-3}{x-7} \underset{x \neq 7}{\overset{}{\iff}} y(x-7) = 4x-3 \iff x(y-4) = 7y-3 \iff x = \frac{7y-3}{y-4}$$

där sista ekvivalensen gäller om och endast om $y \neq 4$. Därifrån ser vi att $y = f(x)$ har en unik lösning $x \neq 7$ om och endast om $y \neq 4$. Därför välja vi $M = \mathbf{R}\setminus\{4\}$.

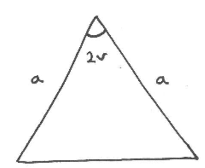
(b) Från räkningen övan ser vi att

$$f^{-1}(y) = \frac{7y-3}{y-4}$$

för alla $y \in \mathbf{R}\setminus\{4\}$.

2.

Betrakta den likbenta triangeln i figuren nedan med två sidor av längden a och vinkeln i mellan lika med $2v$.



(a) Visa att triangelns höjd är $a\cos v$ och den tredje sidan har längden $2a\sin v$.

(b) Räkna ut höjden av triangeln om den först roteras så att en sida med längden a blir basen.

(c) Hitta två uttryck för triangelns area och därifrån bevisa att

$$\sin(2v) = 2\sin v\cos v$$

för $0 < v < \pi/4$.

Solution:

(a) Vi delar triangeln i två med en lodrät linje. Höjden blir längden av den lodräta sträcken, det vill säga $a \cos v$. Strecket delar basen i två och därför är halva basens längd lika med $a \sin v$. Därmed här basen längden $2a \sin v$.

(b) Höjden av den roterade triangeln är $a \sin(2v)$.

(c) Arean av en triangel är $\frac{1}{2}(\text{bas})(\text{höjd})$. Det ger att arean är både $\frac{1}{2}(2a \sin v)(a \cos v) = a^2 \sin v \cos v$ och $\frac{1}{2}(a)(a \sin(2v)) = \frac{a^2}{2} \sin(2v)$. Därifrån får vi att

$$a^2 \sin v \cos v = \frac{a^2}{2} \sin(2v) \implies \sin(2v) = 2 \sin v \cos v$$

för $0 < v < \pi/4$.

---

3. Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ som uppfyller regeln

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{$*$}$$

för alla $x, y \in \mathbf{Q}$, samt likheten

$$f(1) = \pi. \tag{$**$}$$

Använd bara $(*)$ och $(**)$ för att visa:

(a) $f(0) = 1$ [Tips: $0 + 1 = 1$];

(b) Visa med induktion (över n) att $f(nx) = f(x)^n$ för alla $x \in \mathbf{Q}$ och alla positiva heltal n.

Solution:

(a) Vi vet att $f(1) = f(1 + 0) = f(1)f(0)$. Eftersom $f(1) = \pi$ är $\pi = \pi f(0)$ så $f(0) = 1$.

(b) Vi räknar att $f(1 \times x) = f(x) = f(x)^1$, så fallet $n = 1$ stämmer.

Om vi antar att $f(mx) = f(x)^m$ kan vi räknar att

$$f((m+1)x) = f(mx + x) = f(mx)f(x) = f(x)^m f(x) = f(x)^{m+1}$$

så likheten i fallet $n = m$ medför likheten i fallet $n = m + 1$.

Enligt induktionsprincipen är $f(nx) = f(x)^n$ för alla $x \in \mathbf{Q}$ och positiva heltal n.

4.

Hitta alla lösningar $\theta \in \mathbf{R}$ till ekvationen $2 - \cos(2\theta) - 3 \sin \theta = 0$.

Solution:

Vi kan skriva om $2-\cos(2\theta)-3\sin\theta = (1-\cos(2\theta))-3\sin\theta+1 = 2(\sin\theta)^2 - 3\sin\theta + 1$ så ekvationen är ekvivalent med

$$0 = (\sin\theta)^2 - \frac{3}{2}\sin\theta + \frac{1}{2} = (\sin\theta - 1)\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right).$$

Lösningar är då alla θ som uppfyller antingen $\sin\theta - 1 = 0$ eller $\sin\theta - 1/2 = 0$.

$$\sin\theta - 1 = 0 \iff \sin\theta = 1 \iff \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \quad \text{och}$$

$$\sin\theta - 1/2 = 0 \iff \sin\theta = \frac{1}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{eller} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Så alla lösningar är

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{och} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

för alla $k \in \mathbf{Z}$.

5.

(a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Låt $b > 1$ och definiera funktionen $f\colon \mathbf{R} \to (0,\infty)$ enligt formeln $f(x) = b^x$. Visa med hjälp av egenskaper hos exponentialfunktionen och den naturliga logaritmfunktionen att funktionen f är bijektiv och ge en formel för den inversa funktionen f^{-1}.

Solution:

(a) $a^x := \exp(x\ln(a))$ för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) För givet $y \in (0,\infty)$ vill vi vissa att det finns precis en lösning $x \in \mathbf{R}$ till $y = f(x) = b^x$:

$$y = b^x \iff y = \exp(x\ln(b)) \iff \ln(y) = x\ln(b) \underset{\ln(b)>0}{\overset{}{\iff}} x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$$

För givet $y \in (0,\infty)$ har vi att $y = f(x) \implies x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$ så f är injektiv och $y = f(x) \impliedby x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$ så f är surjektiv. Därför är f bijektiv. Formeln för inversa funktionen är då $f^{-1}(y) = \ln(y)/\ln(b)$.

6.

(a) Hitta alla $w \in \mathbf{C}$ så att $w^2 = 8 + 6i$.

(b) Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ så att $z^2 + (2+4i)z - 11 - 2i = 0$.

Solution:

(a) Sätt $w = u + iv$ för $u, v \in \mathbf{R}$. Då är $u^2 - v^2 + 2uvi = (u + iv)^2 = 8 + 6i$ så

$$u^2 - v^2 = 8 \quad \text{och} \tag{1}$$

$$2uv = 6. \tag{2}$$

Men eftersom $|w|^2 = |8 + 6i|$ är

$$u^2 + v^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10. \tag{3}$$

Om vi adderar (1) och (3) får vi att $2u^2 = 18$ och om vi subtraherar (1) från (3) får vi att $2v^2 = 2$. Så

$$u = \pm 3 \quad \text{och} \quad v = \pm 1.$$

Ekvation (2) säger att u och v har samma tecken, så vi har bara två möjligheter: $u = 3$ och $v = 1$, eller $u = -3$ och $v = -1$. Vi kan kolla att både $w = 3 + i$ och $w = -3 - i$ uppfyller (1) och (2) och därför är alla lösningarna till $w^2 = 8 + 6i$.

(b) Vi kan skriva om $z^2 + (2 + 4i)z - 11 - 2i = 0$ som $(z + (1 + 2i))^2 = 8 + 6i$ så enligt första delen av uppgiften är

$$z + (1 + 2i) = 3 + i \quad \text{eller} \quad z + (1 + 2i) = -3 - i.$$

Därför alla lösningar är $z = 2 - i$ och $z = -4 - 3i$.

---

7. Vi vet att

$$\text{"}n^2 \text{ är jämnt delbart med 3"} \implies \text{"}n \text{ är jämnt delbart med 3"} \tag{†}$$

eftersom vi bevisade kontrapositionen i Dugga 1. Använd (†) för att visa lösningar x till $x^2 = 3$ är irrationella.

Solution:

Vi ger ett motsägelsebevis: Vi antar att $x = n/m$ för $n, m \in \mathbf{Z}$ och $x^2 = 3$. Vi får också anta att n och m har inga gemensamma delare.

Vi räknar

$$\frac{n^2}{m^2} = x^2 = 3 \implies n^2 = 3m^2$$

och därför är n^2 jämnt delbart med 3. Utfrån (†) får vi att n är jämnt delbart med 3, d.v.s. $n = 3k$ för något heltal k. Vi får räkna igen att

$$\frac{9k^2}{m^2} = \frac{(3k)^2}{m^2} = \frac{n^2}{m^2} = x^2 = 3 \implies m^2 = 3k^2$$

och därför är m^2 jämnt delbart med 3. Utfrån (†) får vi att m är jämnt delbart med 3, och därmed har vi bevisat att n och m har 3 som en gemensam delare. Det är ett motsägelse och därför måste x vara rationellt.
