Inledande matematisk analys

1.

Betrakta påståendet

$$\text{"Heltalet } n \text{ är jämnt delbart med 3".} \qquad (\clubsuit)$$

(a) Vilka av de följande påstående är negationen av ($\clubsuit$)? Du måste inte motivera ditt svar.

(i) "Vi vet inte om heltalet n är jämnt delbart med 3 eller inte."

(ii) "Heltalet n är lika med $3k + 1$ för något heltal k."

(iii) "Heltalet n är antingen lika med $3k+1$ eller lika med $3k+2$ för något heltal k."

(iv) "Heltalet n är jämnt delbart med 3^k för något heltal k."

(b) Bevisa att

$$\text{"}n \text{ är inte jämnt delbart med 3"} \implies \text{"}n^2 \text{ är inte jämnt delbart med 3".}$$

Solution:

(a) Påståendet (iii) är negationen av ($\clubsuit$).

(b) Om n är inte jämnt delbart med 3 kan n skrivas antingen som $n = 3k + 1$ eller $n = 3k + 2$ för något heltal k. I fallet $n = 3k + 1$ är

$$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

som inte är jämnt delbart med 3. I fallet $n = 3k + 2$ är

$$n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 6k + 4 = 3(3k^2 + 2k + 1) + 1$$

som inte är jämnt delbart med 3.

2.

(a) Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

för reella $r \neq 1$ och positiva heltal n.

(b) Förenkla summan

$$\sum_{k=1}^{53} 4(3)^k(-2)^{k+1}$$

så att den består av högst två termer. Du måste inte räkna ut eventuella potenser i de två termerna.

Solution:

(a) Det finns flera metoder. Till exempel sätt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1}$$

Då är $S_{n+1} = S_n + r^n$ och

$$S_{n+1} = 1 + r\sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1} = 1 + rS_n.$$

Därför

$$S_n + r^n = 1 + rS_n$$

som medför att

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r}.$$

(b) Vi skriver om

$$\sum_{k=1}^{53} 4(3)^k(-2)^{k+1} = 48\sum_{k=1}^{53}(-6)^{k-1}$$

så vi kan använda formeln i (a) med $n = 53$ och $r = -6$:

$$\sum_{k=1}^{53} 4(3)^k(-2)^{k+1} = 48\sum_{k=1}^{53}(-6)^{k-1} = 48\frac{1-(-6)^{53}}{1-(-6)} = \frac{48}{7} - \frac{48(-6)^{53}}{7}$$

3.

(a) Ge definitionen att en icketom mängd A är uppåt begränsad.

(b) Bevisa att följden $(a_n)_{n=4}^{\infty}$ är uppåt begränsad där

$$a_n = \frac{n^2}{n!}$$

för alla heltal $n \geq 4$.

Solution:

(a) Man säger att mängden A är *uppåt begränsad* om det finns $C \in \mathbf{R}$ så att

$$a \leq C \quad \text{för alla } a \in A.$$

(b) Vi vill visa att $a_n \leq 1$ för alla $n \geq 4$. Tydligen är $a_n \leq 1$ ekvivalent med olikheten $n^2 \leq n!$ så vi bevisa den istället. Vi ger ett induktionsbevis.

Först kolla vi fallet $n = 4$: $n^2 = 4^2 = 16 \leq 24 = 4! = n!$, så olikheten stämmer i fallet $n = 4$.

Nu antar vi att $k^2 \leq k!$ för något k och betrakta

$$(k+1)^2 = k^2+2k+1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enligt antagandet}}}{\leq} k!+2k+1 \underset{\substack{\uparrow \\ k \geq 1}}{\leq} k!+2k+k = k!+3k \underset{\substack{\uparrow \\ k \geq 3}}{\leq} k!+k!k = k!(k+1) = (k+1)!.$$

Därmed har vi bevisat att $k^2 \leq k! \implies (k+1)^2 \leq (k+1)!$.

Enligt induktionsprincipen är $n^2 \leq n!$ för alla $n \geq 4$ och därmed är $a_n \leq 1$ för alla $n \geq 4$.

4.

(a) Låt I vara ett intervall. Definiera begreppen *avtagande* och *strängt avtagande* som gäller för en funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$.

(b) Betrakta två funktioner $f\colon I \to \mathbf{R}$ och $g\colon I \to \mathbf{R}$. Visa att om f är avtagande och g är strängt avtagande, då är $f+g$ strängt avtagande.

Solution:

(a) En funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ kallas för *avtagande* om $x < y$ medför att $f(x) \geq f(y)$ för alla $x, y \in I$. En funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ kallas för *strängt avtagande* om $x < y$ medför att $f(x) > f(y)$ för alla $x, y \in I$.

(b) Utifrån definitionerna vet vi att $f(x) \geq f(y)$ och $g(x) > g(y)$ för alla $x, y \in I$ sådana att $x < y$. Därför är

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \geq f(y) + g(x) > f(y) + g(y) = (f+g)(y)$$

för alla $x < y$, så $f+g$ är strängt växande.

5.

(a) Definiera vad det betyder att säga $u \in \mathbf{R}$ är en minsta övre begränsning till en icketom mängd A.

(b) Bevisa att den minsta övre begränsning till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är 1 där

$$b_n = \frac{5n}{n^2+6}$$

för varje positivt heltal n.

Solution:

(a) Det betyder att

(i) $a \leq u$ för alla $a \in A$, och

(ii) till varje $\varepsilon > 0$ finns det $a \in A$ så att $u - \varepsilon < a$.

(b) Först vill vi kolla att 1 är en övre begränsning av $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Vi vill visa att

$$\frac{5n}{n^2+6} \leq 1 \iff 5n \leq n^2+6 \iff 0 \leq n^2-5n+6 \iff 0 \leq (n-3)(n-2)$$

Olikheten $0 \leq (n-3)(n-2)$ säkert stämmer om $n \geq 3$ men vi får även kolla det gäller om $n = 1$ och 2. Därför är 1 en övre begränsning till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$

För att bevisa 1 är den minsta övre begränsningen till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ måste vi visa att varje tal strängt mindre än 1 inte är en övre begränsning till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Observera att

$$b_2 = \frac{5 \times 2}{2^2+6} = 1.$$

Därför, för varje tal $1-\varepsilon$ strängt mindre än 1 (d.v.s för godtyckliga $\varepsilon > 0$) har vi hittat ett element b_2 i följden som uppfyller $1-\varepsilon < 1 = b_2$. Därför är $1-\varepsilon$ inte en övre begränsning till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ och $\sup_n b_n = 1$.
