Inledande matematisk analys

1.

(a) Ge negationen av påståendet:

$$\text{"För alla heltal } n \text{ är } n^2 - 7n + 12 \geq 0.\text{"} \qquad (\spadesuit)$$

(b) Bevisa att påståendet ($\spadesuit$) är sant.

(c) Bevisa att påståendet

$$\text{"För alla reella tal } x \text{ är } x^2 - 7x + 12 \geq 0\text{"}$$

är falskt.

Solution:

(a) Negationen av ($\spadesuit$) är

$$\text{"Det finns ett heltal } n \text{ så att } n^2 - 7n + 12 < 0\text{"}$$

(b) Vi kan skriva om $n^2 - 7n + 12 = (n-3)(n-4)$ så $n^2 - 7n + 12 \geq 0$ är ekvivalent med $(n-3)(n-4) \geq 0$.

Om $n \geq 4$ så är $n - 4 \geq 0$ och $n - 3 \geq 1$. Därför är

$$(n-3)(n-4) \underset{\substack{\uparrow \\ n-3 \geq 1 \text{ och } (n-4) \text{ positivt}}}{\geq} 1 \cdot (n-4) = n - 4 \geq 0.$$

Om $n \leq 3$ så är $n - 4 \leq -1$ och $3 - n \geq 0$. Därför är

$$(n-3)(n-4) \underset{\substack{\uparrow \\ n-4 \leq -1 \text{ och } (n-3) \text{ negativt}}}{\geq} (n-3)(-1) = 3 - n \geq 0.$$

Alla heltal n är antingen mindre än eller lika med 3 eller större än eller lika med 4, så vi har bevisat $(n-3)(n-4) \geq 0$ för alla heltal n.

(c) Ta $x = 7/2$ (men vilket $x \in (3,4)$ som helst skulle funka lika bra). Då är $x^2 - 7x + 12 = (7/2)^2 - 7(7/2) + 12 = 49/4 - 49/2 + 12 = (49 - 98 + 48)/4 = -1/4 \ngeq 0$. Så olikheten gäller inte för *alla* $x \in \mathbf{R}$.

2.

(a) Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

för $a, r \in \mathbf{R}$ och $r \neq 1$.

(b) Förenkla summan

$$\sum_{k=1}^{46} 4(3)^k(-1)^{k-1}$$

så att den består av högst två termer. Du måste inte räkna ut eventuella potenser i de två termerna.

Solution:

(a) Det finns flera metoder. Till exempel sätt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$$

Då är $S_{n+1} = S_n + ar^n$ och

$$S_{n+1} = a + r\sum_{k=1}^{n-1} ar^{k-1} = a + rS_n.$$

Därför

$$S_n + ar^n = a + rS_n$$

som medför att

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

(b) Vi skriver om

$$\sum_{k=1}^{46} 4(3)^k(-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{46} 12(-3)^{k-1}$$

så vi använder formeln i (a) med $n645$, $r = -3$ och $a = 12$:

$$\sum_{k=1}^{46} 12(-3)^{k-1} = 12\frac{1-(-3)^{46}}{1-(-3)} = 3(1-3^{46}) = 3-3^{47}.$$

3.

(a) Ge definitionen att en icketom mängd A är uppåt begränsad.

(b) Bevisa att följden $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ är uppåt begränsad där a_n definieras enligt uttrycket

$$a_n = \frac{n+2}{(n+4)(n+8)} \quad \text{för alla } n \in \mathbf{N}.$$

Solution:

(a) Man säger att mängden A är *uppåt begränsad* om det finns $C \in \mathbf{R}$ så att

$$a \leq C \quad \text{för alla } a \in A.$$

(b) För alla $n \in \mathbf{N}$ är $n+2 \leq n+4$. Därför är

$$a_n = \frac{n+2}{(n+4)(n+8)} \underset{\substack{\uparrow \\ (n+4)(n+8) \text{ positivt}}}{\leq} \frac{n+4}{(n+4)(n+8)} = \frac{1}{(n+8)}.$$

Dessutom är $n \geq 1$ för alla $n \in \mathbf{N}$, så $n+8 \geq 9$ som medför att $1/(n+8) \leq 1/9$. Därför är

$$a_n \leq \frac{1}{(n+8)} \leq \frac{1}{9} \quad \text{för alla } n \in \mathbf{N}$$

och $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ är uppåt begränsad.

4.

(a) Låt I vara ett intervall. Definiera begreppet *strängt växande* som gäller för en funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$.

(b) Betrakta en funktion $f\colon [6, \infty) \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formeln

$$f(x) = \frac{x^3 - 13x^2 + 57x - 81}{x - 3}$$

för alla $x \in [6, \infty)$. Visa att f är strängt växande. [Tips: Förenkla bråket.]

Solution:

(a) En funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ kallas för *strängt växande* om $x < y$ medför att $f(x) < f(y)$ för alla $x, y \in I$.

(b) Vi kan faktorisera

$$x^3 - 13x^2 + 57x - 81 = (x^2 - 10x + 27)(x - 3)$$

så

$$f(x) = \frac{x^3 - 13x^2 + 57x - 81}{x - 3} = x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 = g(h(x))$$

där $h\colon [6, \infty) \to [1, \infty)$ och $g\colon [1, \infty) \to \mathbf{R}$ definieras enligt

$$\begin{aligned} h(x) &= x - 5 \quad \text{för alla } x \in [6, \infty), \text{ och} \\ g(y) &= y^2 + 2 \quad \text{för alla } y \in [1, \infty). \end{aligned}$$

Om vi kan visa att både h och g är strängt växande, då är f strängt växande (enligt sats 2.40). Men

$$x_1 < x_2 \implies h(x_1) = x_1 - 5 < x_2 - 5 = h(x_2)$$

så h är strängt växande. Och

$$1 \leq y_1 < y_2 \implies \left\{ \begin{array}{c} y_1^2 < y_1 y_2 \\ \text{och} \\ y_1 y_2 < y_2^2 \end{array} \right\} \implies y_1^2 < y_2^2 \implies g(y_1) = y_1^2 + 2 < y_2^2 + 2 = g(y_2)$$

så g är strängt växande.

5.

(a) Definiera vad det betyder att säga $u \in \mathbf{R}$ är en minsta övre begränsning till en icketom mängd A.

(b) Betrakta mängden $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x < 5\}$. Bevisa att $\sup A = 5$.

Solution:

(a) Det betyder att

(i) $a \leq u$ för alla $a \in A$, och

(ii) till varje $\varepsilon > 0$ finns det $a \in A$ så att $u - \varepsilon < a$.

(b) Olikheten $x^2 - 4x < 5$ är ekvivalent med $x^2 - 4x - 5 < 0$ och vi kan faktorisera $x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$ så

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x < 5\} = \{x \in \mathbf{R} \mid (x+1)(x-5) < 0\}.$$

Olikheten $(x+1)(x-5) < 0$ gäller om och endast om

$$\left\{ \begin{array}{c} x+1 < 0 \text{ och } x-5 > 0, \\ \text{eller} \\ x+1 > 0 \text{ och } x-5 < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} x < -1 \text{ och } x > 5, \\ \text{eller} \\ x > -1 \text{ och } x < 5 \end{array} \right\}$$

Men $x < -1$ och $x > 5$ kan inte gäller samtidigt, så

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 5\} = (-1, 5).$$

Därför är $x \leq 5$ för alla $x \in A$ och 5 är då en övre begränsning (d.v.s (i) uppfylles).

Nu vill vi till varje $\varepsilon > 0$ hitta ett $a \in A$ så att $5 - \varepsilon < a$. Om $0 < \varepsilon < 6$ är $-1 < 5 - \varepsilon < 5$ så om vi väljer $a = 5 - \varepsilon/4$ så har vi att

$$-1 < 5 - \varepsilon < 5 - \varepsilon/4 = a < 5$$

så $a \in A$ och $5 - \varepsilon < a$. Det vill säga (ii) uppfylles.

Om $\varepsilon \geq 6$ har vi att $5 - \varepsilon \leq -1 < 5$ så vi kan välja, till exempel, $a = 1$. Då är

$$5 - \varepsilon \leq -1 < 1 = a < 5$$

så $a \in A$ och $5 - \varepsilon < a$. Det vill säga (ii) uppfylles.

Då har vi visat att (i) och (ii) uppfylles med $u = 5$, så $\sup A = 5$.
