TATA79/TEN3 **Tentamen, 2016-03-31**

Inledande matematisk analys

1.

(a) Visa att $4n < 2^n$ för alla $n \in \mathbf{N}$ så att $n \geq 5$.

(b) Varför funkar inte ditt bevis av (a) om man betraktar $n < 5$?

Solution:

(a) Man kan använda induktion. Först kollar vi att olikheten stämmer då $n = 5$: $4n = 4 \times 5 = 20$ och $2^n = 2^5 = 32$ så $4n < 2^n$ då $n = 5$.

Sen antar vi att olikheten stämmer då $n = k$ för något $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 5$, och betraktar

$$4(k+1) = 4k + 4 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enligt olikheten med } n=k}}{<} 2^k + 4 = 2^k + 2^2 \leq 2^k + 2^k = 2^k(1+1) = 2^{k+1}$$

som visa att olikheten stämmer då $n = k + 1$.

Enligt induktion följer olikheten för alla $n \in \mathbf{N}$ så att $n \geq 5$.

(b) Om $k = 1$ så funkar inte induktions steget, eftersom $2^2 \nleq 2^k$ då.

För alla $k = 1, 2, 3, 4$ funkar inte bas fallet eftersom $4 \times 1 \nless 2^1$, $4 \times 2 \nless 2^2$, $4 \times 3 \nless 2^3$ och $4 \times 4 \nless 2^4$.

---

2. Visa att $9^n - 2^n$ är jämnt delbart med 7 för alla $n \in \mathbf{N}$. (Det sägs att $m \in \mathbf{N}$ är *jämnt delbart* med $k \in \mathbf{N}$ om $m/k \in \mathbf{N}$.)

Solution: Det finns minst två sätt att lösa problemet.

Man får faktorisera:

$$9^n - 2^n = (9-2)(9^{n-1} + 9^{n-2} \times 2 + 9^{n-3} \times 2^2 + \cdots + 9 \times 2^{n-2} + 2^{n-1})$$

så

$$\frac{9^n - 2^n}{7} = \frac{9^n - 2^n}{9-2} = 9^{n-1} + 9^{n-2} \times 2 + 9^{n-3} \times 2^2 + \cdots + 9 \times 2^{n-2} + 2^{n-1} \in \mathbf{N}.$$

Man får också använda induktion. Först kollar vi om $n = 1$ så är $9^n - 2^n = 9 - 2 = 7$ som är jämnt delbart med 7. Sen antar vi att $9^k - 2^k$ är jämnt delbart med 7 för något $k \in \mathbf{N}$ och räknar

$$\frac{9^{k+1} - 2^{k+1}}{7} = \frac{9^{k+1} - 9^k \times 2 + 9^k \times 2 - 2^{k+1}}{7} = \frac{9^k(9-2) + (9^k - 2^k)2}{7} = 9^k + 2\frac{9^k - 2^k}{7}.$$

Men vi kan dra slutsatsen att det är ett naturligt tal under hypotsen att $(9^k - 2^k)/7$ är ett naturligt tal. Enligt induktion är $9^n - 2^n$ är jämnt delbart med 7 för alla $n \in \mathbf{N}$.

3.

(a) Använd

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

för alla $\theta, \varphi \in \mathbf{R}$ för att visa

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Hitta alla $\theta \in \mathbf{R}$ sådana att $1 + \cos(2\theta) + 3\sin\theta = 0$.

Solution:

(a)

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

därför är

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Vi räknar

$$0 = 1 + \cos(2\theta) + 3\sin\theta = 1 + (1 - 2\sin^2\theta) + 3\sin\theta = -2\sin^2\theta + 3\sin\theta + 2$$

så ekvationen är ekvivalent med

$$0 = 2(\sin^2\theta - 3/2\sin\theta - 1) = 2((\sin\theta - 3/4)^2 - 9/16 - 1) = 2((\sin\theta - 3/4)^2 - 25/16)$$

som i sin tur är ekvivalent med

$$\sin\theta = 3/4 \pm 5/4.$$

Så antingen är $\sin\theta = 2$ eller $\sin\theta = -1/2$. Eftersom det finns inga lösningar till $\sin\theta = 2$ alla lösningar till ekvationen är precis lösningarna till $\sin\theta = -1/2$. Därför lösningarna är

$$\theta = -5\pi/6 + 2k\pi, -\pi/6 + 2k\pi$$

för alla $k \in \mathbf{Z}$.

4.

(a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Visa att definitionen av a^x från (a) stämmer överens med definitionen då x är ett heltal i fallet $x = 3$. Det vill säga kontrollera att $a^3 = aaa$ enligt definitionen du skrev i (a).

Solution:

(a) $a^x := \exp(x\ln(a))$ för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Vi räknar ut att

$$a^3 \underset{\text{(a)}}{\overset{}{=}} \exp(3\ln(a)) = \exp(\ln(a)+\ln(a)+\ln(a)) \underset{\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)}{=} \exp(\ln(a))\exp(\ln(a))\exp(\ln(a)) \underset{\text{(a)}}{=} aaa.$$

---

5. Bevisa Bernoullis olikhet: För alla reella tal $x \geq -1$ och alla $n \in \mathbf{N}$ får man att

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Solution: Vi ger ett induktionsbevis av

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \tag{1}$$

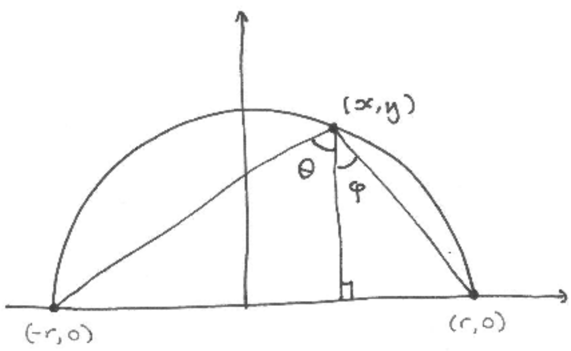
Först kollar vi vad som händer då $n=1$: $(1+x)^n = (1+x) \geq (1+x) = 1+nx$ så (1) stämmer om $n=1$. Sen antar vi att (1) stämmer för $n=m$ där $m \in \mathbf{N}$ och betraktar fallet $n=m+1$:

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)^m(1+x) \geq (1+mx)(1+x) = 1+mx+x+mx^2 \geq 1+(m+1)x$$

så (1) stämmer för $n=m+1$ och (1) är bevisad.

6.

(a) Betrakta en punkt (x, y) i planet som ligger på en cirkel med radien $r > 0$ och medel punkt i origo. Det innebär då att $x^2+y^2=r^2$. Låt $y>0$, och θ och φ vara vinklarna i bilden nedan. Visa att $\cos(\theta+\varphi)=0$ för alla (x, y).



Solution: Vi kan direkt se att

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2+(x+r)^2}}, \quad \sin\theta = \frac{x+r}{\sqrt{y^2+(x+r)^2}},$$
$$\cos\varphi = \frac{y}{\sqrt{y^2+(r-x)^2}} \quad \text{och} \quad \sin\varphi = \frac{r-x}{\sqrt{y^2+(r-x)^2}}.$$

Därför kan vi räkna

$$\begin{aligned}
\cos(\theta+\varphi) &= \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) \\
&= \frac{y}{\sqrt{y^2+(x+r)^2}}\frac{y}{\sqrt{y^2+(r-x)^2}} - \frac{x+r}{\sqrt{y^2+(x+r)^2}}\frac{r-x}{\sqrt{y^2+(r-x)^2}} \\
&= \frac{y^2-(x+r)(r-x)}{\sqrt{y^2+(x+r)^2}\sqrt{y^2+(r-x)^2}} = \frac{y^2+x^2-r^2}{\sqrt{y^2+(x+r)^2}\sqrt{y^2+(r-x)^2}} = 0
\end{aligned}$$

7.

(a) Definiera $e^{i\theta}$ för $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Bevisa att

$$\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$$

för alla reella tal x och y. Endast definitioner och trigonometriska räknelagar får användas utan att de först bevisas.

Solution:

(a) $e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$ för $\theta \in \mathbf{R}$.

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ix}}{e^{iy}} &= \frac{\cos x + i\sin x}{\cos y + i\sin y} = \frac{(\cos x + i\sin x)(\cos y - i\sin y)}{(\cos y + i\sin y)(\cos y - i\sin y)} \\
&= (\cos x\cos y + \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y - \cos x\sin y) \\
&= \cos(x-y) + i\sin(x-y) = e^{i(x-y)}.
\end{aligned}$$
