Inledande matematisk analys (TATA79)
Höstterminen 2017
Dugga 1: Hur duggapluggar man?

Här skriver jag några tips om hur man kan plugga för dugga 1. Ni är säkert sakkunniga på tentor men här förklarar jag vad jag förväntar mig att ni uppnår för att få ett bra betyg.

- Kom ihåg målen av kursen (som skrivit i Kurs-PM) inbegrep att träna logiskt tänkande och formulera lösningar av matematiska problem så att tankegången går att följa. Därför försök att visa examinator hur du tänker när du löser ett problem. Vi kan bara rätta vad finns på pappret och inte vad vi tror du kunde har tänkt.

  Medan du tentapluggar vara ärligt med dig själv: förstår du vad du skriver eller räknar du utan förståelse? Matematiska problem är enklare om man kan tänka ut snarare än memorera en mängd lösningar. Om du har kört fast är det bra att titta på lösningsförslag eller läsa en annans lösning, men det funkar bäst om syftet är att förstå och inte bara kopiera.

  Även om du har inte försått allt än hinner du att förstå. Men i tentasalen är det försent, så plannera hur du ska plugga för duggan nu.

- Alla materialet som ska tenteras finns i föreläsningsanteckningar (som du kan hämta från mig om du inte redan har fått de). Dugga 1 fokuserar exklusivt på kapitel 2 (men kan också behöva att förkunskap används). Jag förväntar mig att ni kan komma ihåg:

  – Hur man utföra ett logiskt argument, samt begrepp som negation och kontraposition. Man kan använder enkla aritmetiska operationer utan motivation men man måste markera om man använder en egenskap hos ett tal. Däremot måste man inte komma ihåg alla axiomen;
  – Definitionerna av heltals potenser, sats 2.10 samt sitt bevis, hur man skriva ett tal i olika bas, m.m., men inte tecknen från andra talbeteckningssystem;
  – Definition av olika mängd av reella tal, t.ex. naturliga tal, rationella tal, interval. Definitioner som rör mängder, t.ex. supremum och infimum, och sina egenskaper;
  – Geometriska och aritmetiska följder samt deras summor, binomialkoefficienterna och binomialsatsen;
  – Hur man kan addera, multiplicera och sammansätta funktioner. Definitioner och satser som gäller polynom. Man måste inte kom ihåg deras bevis utantill, men man bör förstå de. Definitionen av olika former av monotinicitet och relaterade satser.

  Bevis av nivån som ni har sätt i inlämnings och lektionsuppgifter ska tenteras. Det kommer inget långt bevis i duggan. Om du kan alla lektionsuppgifter t.o.m lektion 5, inlämningsuppgifter 1a och förstår kapitel 2 av föreläsningsanteckningar, då är du förberedd.

- Provdugga, dugga och omdugga 1 från och med 2015 har samma längd och stil som duggan som ni kommer skriva. Uppgifter av samma stil som uppgift 1 på 2015:s provdugga och dugga (men inte omduggan) som gällde axiom kommer inte finnas på duggan där här året: Jag kände att denna uppgift var inte så givande för studenterna.

- En del av testet är psykologisk: Det är meningen att en tentasal är en stressig miljö så man måste lära sig att hantera stress. Det bästa sätt att hålla sig lugn är att planera i förväg och se till att ni har fått en god natts sömn.

- Det verkar som många av er har haft lite svårt med uppgifter som rör minsta övre begränsningar och stösta under begränsningar. Här kommer lite extra förklaring och ett par exempel som jag skrev förre året.

  – **Definitionen** I princip behöver man inte motivera en definition: Den är någonting vi kan ta för givet. Men det är givetvis avändbart att förstå motivationen bakom definitionen. Då är det enklare att komma ihåg definitionen och förstå hur ämnet hänger ihop.

    Ett tal $u \in \mathbf{R}$ kallas för en *minsta övre begränsning* eller *supremum* till en (icketom) mängd $A \subseteq \mathbf{R}$ (och skrivs $u = \sup A$) om två villkor är uppfyllde. Den första säger att u är **en** övre begränsning till A:

$$a \leq u \text{ för alla } a \in A. \tag{†}$$

Senast ändrad: 10 november 2017.

Den andra säger att varje tal mindre än u (här skrivet i formen $u - \varepsilon$ för positivt ε) inte är en övre begränsning, det vill säger u är **den minsta** övre begränsningen som finns:

$$\text{för varje } \varepsilon > 0 \text{ finns det ett } a \in A \text{ så att } u - \varepsilon < a. \tag{‡}$$

- **Exempel** Nu går vi genom ett par exempel. För att visa att ett tal u är en supremum till en mängd A måste man visa att både villkor (†) och (‡) gäller för u och A.

  1. Visa att $\sup A = 3/4$ då $A = \{(3n+2)/(4n+5) \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$.
     Först vill vi kontrollera att (†) stämmer. Det betyder att vi måste visa att
     $$\frac{3n+2}{4n+5} \leq \frac{3}{4} \tag{$\star$}$$
     för **alla** $n \in \mathbf{Z}_+$. Genom att multiplicera med $4(4n+5)$ ser vi att den är ekvivalent med
     $$12n + 8 = 4(3n+2) \leq 3(4n+5) = 12n + 15$$
     och den stämmer för alla n eftersom vi kan stryka $12n$ ut och $8 \leq 15$ så ($\star$) stämmer för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.
     Sen vill vi kontrollera att (‡) stämmer. Det betyder att för **varje** $\varepsilon > 0$ vi måste hitta **något** $n \in \mathbf{Z}_+$ så att
     $$\frac{3}{4} - \varepsilon < \frac{3n+2}{4n+5}. \tag{$\star\star$}$$
     Här beror valet av n föstås på ε. Genom att multiplicera med $4(4n+5)$ ser vi att den är ekvivalent med
     $$12n + 15 - 4\varepsilon(4n+5) = 3(4n+5) - 4\varepsilon(4n+5) < 4(3n+2) = 12n + 8$$
     och i sin tur är ekvivalent med
     $$7 < 4\varepsilon(4n+5). \tag{$\spadesuit$}$$
     För varje givet $\varepsilon > 0$ är det möjligt att välja ett $n \in \mathbf{Z}_+$ så att ($\spadesuit$) gäller — det räcker att välja n tillräckligt stort (till exempel, ett naturligt tal större än $7/(16\varepsilon)$ räcker). Därför har vi visat att för varje $\varepsilon > 0$ finns det något $n \in \mathbf{Z}_+$ så att ($\star\star$) stämmer.
     Eftersom vi har visat att (†) och (‡) stämmer med $u = 3/4$ och $A = \{(3n+2)/(4n+5) \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ har vi bevisat att $\sup A = 3/4$.
  2. Visa att $\sup A = 10$ då $A = \{7 - 6n - 3n^2 \mid n \in \mathbf{Z}\}$.
     Först vill vi kontrollera att (†) stämmer. Det betyder att vi måste visa att
     $$7 - 6n - 3n^2 \leq 10 \tag{$\diamondsuit$}$$
     för **alla** $n \in \mathbf{Z}$. Men
     $$7 - 6n - 3n^2 = -3(n+1)^2 + 10 \leq 10$$
     så ($\diamondsuit$) stämmer för alla $n \in \mathbf{Z}$
     Sen vill vi kontrollera att (‡) stämmer. Det betyder att för **varje** $\varepsilon > 0$ vi måste hitta **något** $n \in \mathbf{Z}$ så att
     $$10 - \varepsilon < 7 - 6n - 3n^2. \tag{$\heartsuit$}$$
     Genom att skriva om $7 - 6n - 3n^2 = -3(n+1)^2 + 10$ ser vi att den är ekvivalent med
     $$10 - \varepsilon < -3(n+1)^2 + 10$$
     och i sin tur är ekvivalent med
     $$3(n+1)^2 < \varepsilon. \tag{$\spadesuit$}$$
     För varje givet $\varepsilon > 0$ är det möjligt att välja ett $n \in \mathbf{Z}$ så att ($\spadesuit$) gäller — det räcker att välja n så att $3(n+1)^2 = 0$, det vill säger $n = -1$ (så i det här fallet är valet av n det samma för varje $\varepsilon > 0$). Därför har vi visat att för varje $\varepsilon > 0$ finns det något $n \in \mathbf{Z}$ så att ($\heartsuit$) stämmer.
     Så vi har bevisat att $\sup A = 10$.

- Observera att $\sup A$ måste inte tillhör till mängden A. I exempel 2 var 10 ett element i $\{7 - 6n - 3n^2 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ men i exempel 1 var 4/3 inte ett element i $\{(3n+2)/(4n+5) \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$.