Inledande matematisk analys (TATA79)

Höstterminen 2017

Lösningsförslag till ett urval självstudieuppgifter

Lektion A1

När uppgifter är så pass ”enkla” är det svårt att veta vad förväntas göra. De flesta studenter är inte så vana vid att behandla olikheter och, trots att många räkna regler känner bekanta från arbete med likheter, dyker upp överraskningar då och då. Syftet med de här uppgifterna är att lära argumentera från grunläggande axiom och definitioner. Förstås behövs ett så grundläggande argument inte i alla sammanhang, men det hjälper mycket i början av kursen för att hjälpa oss bygger upp en robust intuition.

A.5(c) Vi vill visa att $x > 5 \implies x(x-2) > 15$. Eftersom vänsterledet av olikheten man vill bevisa innehåller produkter gisser man att prova använda axiom som tillåter oss att muliplicera båda led med en konstant eller addera en konstant till båda led.

Enligt II(c) med $c = 2$ vet vi att $x > 5 \implies x - 2 > 5 - 2 = 3$. Eftersom x måste vara positivt så kan vi säga $x - 2 > 3 \implies x(x-2) > 3x$ enligt II(d), och enligt det samma axiom $x > 5 \implies 3x > 3 \times 5 = 15$. Allihop då

$$x > 5 \implies x(x-2) > 3x > 15.$$

A.6(c) Kontrapositionen av påståendet ”$A \implies B$” är ”$\neg B \implies \neg A$” där A och B också är påståenden. Därför tar vi A lika med påståendet ”$x > 5$” och B lika med ”$x(x-2) > 15$” så $\neg A$ är ”$x \leq 5$” och $\neg B$ är ”$x(x-2) \leq 15$”. Kontrapositionen är då

$$x(x-2) \leq 15 \implies x \leq 5.$$

A.7(b) Där här uppgiften kan vara knepig för att implicationen som ges i uppgiften är faktiskt en förkortning. Implikationen i uppgiften är

$$x > 5 \Longleftarrow x(x-2) > 15.$$

Men vad menas med det är: Om x är ett tal som uppfylls olikheten $x(x-2) > 15$ så uppfyller det också olikheten $x > 5$. Därför för att visa den är felaktig räcker det att bara hitta ett x som uppfyller $x(x-2) > 15$ fast inte $x > 5$.

För att hitta ett sådant x använder vi oss av lite intuition. Ni förmodligen vet att det finns två sätt att ett utryck som $x(x-2)$, som är ett andragradspolynom i x, kan vara stort: antingen x är jätte positivt, eller x är jätte negativt. Vi vill hitta ett x som uppfyller $x \leq 5$, så vi prova ett negativt x.

Till exempel, vi prova $x = -10$. Då är $x(x-2) = 120 > 15$ men sammtidigt är $x = -10 \not> 5$. Därför har vi bevisat att påståendet ”$x > 5 \Longleftarrow x(x-2) > 15$” är felaktigt.

Lektion A2

I A.13 och A.14 måste man inte bevisa varje steg utifrån axiomen. Det går bra att försöka skriva ett vettigt argument. Förstås finns det flera möjliga svar, men det räcker att behandla ett par stycken villkor bra för varje uppgift.

A.13 Betrakta ett jämnt heltal n och $a \neq 0$. Då är $a^n = a^{2k} = (a^k)^2$ för något heltal k. Utifrån II(d) och exempel 2.5 kan man bevisa att $(a^k)^2 > 0 \times a_k = 0$ i fallet $a^k > 0$ och utifrån sats 2.9 och exempel 2.5 får man att $(a^k)^2 > 0 \times a_k = 0$ i fallet $a^k < 0$. Därför, så länge $a^k \neq 0$, det vill säga $a \neq 0$, kan vi dra slutsatsen att $a^n > 0$. Kort sagt vi har hittat ett exempel på tillräckliga villkor: $a \neq 0$ och n jämnt medför att $a^n > 0$.

Om $a > 0$ då är $a^2 > a0 = 0$ enligt II(d) och exempel 2.5. Vi kan upprepa argumentet för att visa $a^n > 0$ för alla heltal n. Då har vi hittat ett andra tillräckligt villkor: Om $a > 0$ då är $a^n > 0$.

Om $a = 0$ då är $a^n = 0$ så länge n är positivt. (Om $a = 0$ och n är icke-positivt så är a^n odefinerat.)

A.14 Först observera att slutsatsen inte gäller i allmänt utan andra villkor än $a < b$. Till exempel, om $n = 2$, $a = -5$ och $b = 3$ är $a < b$ men $a^n = 25 \not< 9 = b^n$.

Det är möjligt att hitta flera olika villkor där implikationen gäller. Här går vi genom ett par exempel.

Först betrakta vi $a > 0$ och n positivt. Sen, till exempel, om $n = 4$ kan vi säga

$$a^4 < a^3b < a^2b^2 < ab^3 < b^4$$

enligt II(d). Samma bevis funkar för varje heltal n — man kan förstås argumentera att ett induktionsbevis skulle vara mer tydligt för att behandla allmäna n, men det kommer vi jobba mycket med senare i kursen.

En andra villkor är att $a < 0$, $b > 0$ och n är udda. I så fall är kan man argumentera (utifrån II(d), exempel 2.5 och exempel 2.9, till exempel) att $a^n < 0$ och $b^n > 0$ och därför är $a^n < b^n$.'

A.16 (a) 111, 10001, 1100 respektive 100000.

(b) 21, 122, 110 respektive 1012.

Lektion B1

B.3(b) Vi vill bevisa

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad (*)_n$$

för alla positiva heltal n.

Först kontrollerar vi fallet $(*)_1$, då räcknar vi att $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ och $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$, så $(*)_1$ är bevisat.

Nu antar vi att $(*)_m$ är sant för något positivt heltal m och betraktar $(*)_{m+1}$. Vänsterledet är

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3$$

enligt antagandet $(*)_m$. Vi får räckna

$$\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3 = (m+1)^2\left(\frac{m^2}{4} + (m+1)\right) = \frac{(m+1)^2((m+1)+1)^2}{4}$$

som är högerledet i $(*)_{m+1}$. Därför är implikationen $(*)_m \implies (*)_{m+1}$ bevisat.

Enligt induktionsprincipen är $(*)_n$ bevisat för alla positiva heltal n.

B.4(a) Vi vill bevisa

$$4n \leq 2^n \qquad (**)_n$$

för alla heltal $n \geq 5$.

Först kontrollerar vi fallet $(**)_5$, då räcknar vi att $4n = 4 \times 5 = 20$ och $2^n = 2^5 = 32$. Eftersom $20 \leq 32$ är $(**)_1$ bevisat.

Nu antar vi att $(**)_m$ är sant för något heltal $m \geq 5$ och betraktar $(**)_{m+1}$. Vänsterledet är

$$4(m+1) = 4m + 4 \leq 2^m + 4 = 2^m + 2^2$$

enligt antagandet $(**)_m$. Eftersom $m \geq 2$ är

$$2^m + 2^2 \leq 2^m + 2^m = 2^m(1+1) = 2^{m+1}$$

som är högerledet i $(**)_{m+1}$. Därför är implikationen $(*)_m \implies (*)_{m+1}$ bevisat.

B.6(a) Vi använder fallet $n = k + 1$, som är det vi vill bevisa.

Lektion B2

B.9 (a) Eftersom $4x-7 \geq 2 \iff 4x \geq 9 \iff 9/4 \leq x$, då är $\{x \in \mathbf{R} \,|\, 4x-7 \geq 2 \text{ och } x \leq 4\} = \{x \in \mathbf{R} \,|\, 9/4 \leq x \leq 4\}$ som är intervallet $[9/4, 4]$ och inte $[0, 4]$.

(b) Mängden $M = \{x \in \mathbf{R} \,|\, 2x^2 + 4 < 12 - 8x\}$ kan inte vara intervallet $[0, 4]$ eftersom $2(-1)^2 + 4 = 6 < 20 = 12 - 8(-1)$ så $-1 \in M$ fast $-1 \notin [0, 4]$.

(c) Vi har

$$x^2 - 2x + 1 \leq 1 \iff x(x-2) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 2$$

och

$$8 \leq 6x - x^2 \iff x^2 - 6x + 8 \leq 0 \iff (x-4)(x-2) \leq 0 \iff 2 \leq x \leq 4$$

så

$$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 - 2x + 1 \leq 1 \text{ eller } 8 \leq 6x - x^2\} = \{x \in \mathbf{R} \,|\, 0 \leq x \leq 2 \text{ eller } 2 \leq x \leq 4\} = [0, 4]$$

(d) Ett liknande argument ger oss att

$$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 - 4x \leq 0 \text{ och } 8 \leq 6x - x^2\} = \{x \in \mathbf{R} \,|\, 0 \leq x \leq 4 \text{ och } 2 \leq x \leq 4\} = [2, 4]$$

(e) Återigen kan vi räckna

$$\begin{aligned} x^2 - 4x < 0 &\iff x(x-4) < 0 \iff 0 < x < 4, \\ x^2 - 4x + 3 = 0 &\iff (x-3)(x-1) = 0 \iff x = 3 \text{ eller } x = 1, \quad \text{och} \\ x^2 + 8 = 6x &\iff (x-4)(x-2) = 0 \iff x = 4 \text{ eller } x = 2. \end{aligned}$$

Därför är

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 - 4x < 0,\ x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ eller } x^2 + 8 = 6x\} \\ &= (0, 4) \cup \{3, 1\} \cup \{4, 2\} = (0, 4] \neq [0, 4] \end{aligned}$$

B.10 Vi kan skriva

$$(2n)! = 2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots 2 \times 1.$$

För att jämföra $(2n)!$ med n^n jämför vi faktorerna i $(2n)!$ med faktorerna i n^n. Vi vet att $(2n-k) \geq n$ så länge $0 \leq k \leq n$, därför är

$$2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1) \geq n^n$$

eftersom vänsterledet innehåller n faktorer. Vi får också uppskata

$$n(n-1)\ldots 2 \times 1 \geq 1.$$

Vi dra slutsatsen att

$$(2n)! = 2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots 2 \times 1 \geq n^n \times 1 = n^n$$

och därför är

$$a_n = \frac{n^n}{(2n)!} \leq 1$$

för varje $n \in \mathbf{Z}_+$.

B.11 (a) Vi kan skriva om $x^2 - 10x + 25 < 4 \iff (x-7)(x-3) < 0$ så $A = \{x \in \mathbf{R} \,|\, (x-7)(x-3) < 0\} = (3,7)$ är ett interval. Vi har bevisat i föreläsningar att ett begränsat intervall har en minsta övre begränsning och en stösta undre begränsning som är intervallets höger-, respektive, vänsterändpunkt. Därför är $\inf B = 3$ och $\sup B = 7$.

(b) Varken 3 eller 7 tillhör till mängden A.

(c) Vi kan skriva om $4x^2 - 36x + 81 \leq 25 \iff x^2 - 9x + 14 \leq 0 \iff (x-7)(x-2) \leq 0$ så $A = \{x \in \mathbf{R} \,|\, (x-7)(x-2) \leq 0\} = [2,7]$ är ett interval. Av samma anledning som ovan är $\inf B = 2$ och $\sup B = 7$.

(d) Både 2 och 7 tillhör till mängden B.

(e) Vi kan skriva om $x^2 + 4x - 5 \geq 0 \iff (x+5)(x-1) \geq 0 \iff x \leq -5$ eller $x \geq 1$. Så

$$C = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x > -1 \text{ och } x^2 + 4x - 5 \geq 0\} = (1, \infty).$$

Eftersom vänsterändpunkten är ändlig så är $\inf C = 1$.

För att visa det finns ingen övre begränsningen räka det att observera alla positiva heltal förutom 2 tillhör till C. Vi vet (enligt exempel 2.20) att $\mathbf{Z}_+$ har ingen minsta övre begränsning, så C kan inte heller.

B.12 Ett godtyckligt element i mängden

$$M = \{y \in \mathbf{R} \,|\, y = (x-1)(x+5) \text{ och } x \in [-6,2]\}$$

har formen $y = (x-1)(x+5) = (x+2)^2 - 9$ och eftersom $(x+2)^2 \geq 0$ är -9 en undre begränsing till M. Utöver det tillhör -9 till mängden eftersom $-9 = (x-1)(x+5)$ där $x = -2$ och $-2 \in [-6,2]$. Därför kan varje tal större än -9 inte vara en undre begränsning. Vi dra slutsatsen att $\inf M = -9$.

För att visa M har en minsta övre begränsning kollar vi tre olika fall: $x \in [-6,-5]$; $x \in (-5,1)$; och $x \in [1,2]$. Anledningen att välja de där fallen är att det är då x förflyter sig från ett interval till ett andra byter minst en faktor i uttrycket $y = (x-1)(x+5)$ tecken.

Fall 1: $x \in [-6,-5]$. Då är $-7 \leq x-1 \leq -6$ och $-1 \leq x+5 \leq 0$ så $0 = (-6)(0) \leq y = (x-1)(x+5) \leq (-7)(-1) = 7$. I synnerhet kan y anta värdet 7 genom att ta $x = -6 \in [-6,-5]$.

Fall 2: $x \in (-5,1)$. Då är $-6 < x-1 < 0$ och $0 < x+5 < 6$ så $y = (x-1)(x+5)$ blir negativt och därmed mindre än y-värden från fall 1.

Fall 3: $x \in [1,2]$. Då är $0 \leq x-1 \leq 1$ och $6 \leq x+5 \leq 7$ så $0 = (0)(6) \leq y = (x-1)(x+5) \leq (1)(7) = 7$. (Återigen kan y anta värdet 7 genom att sätta in $x = 2 \in [1,2]$.)

Från fallen 1–3 dra vi slutsatsen att 7 är en övre begränsning till M och eftersom $7 \in M$ kan ett tal större än 7 inte vara en ovre begränsning. Därför är $\sup M = 7$.

Lektion C1

C.3 Vi räcknar att

$$|a{+}b| = |a|{+}|b| \implies |a{+}b|^2 = (|a|{+}|b|)^2 \implies a^2{+}b^2{+}2ab = a^2{+}b^2{+}2|a||b| \implies ab = |a||b|.$$

Om $a > 0$ är $|a| = a$ och därför $ab = |a||b| \implies b = |b|$, så $b \geq 0$. Om $a < 0$ är $|a| = -a$ och därför $ab = |a||b| \implies b = -|b|$, så b är icke-positivt. Om $a = 0$ då kan b vara vilket tal som helst. Därmed har vi räcknat ut kanditater för lösningar: $|a+b| = |a| + |b|$ medför att $a > 0$ och $b \geq 0$, $a < 0$ och $b \leq 0$, eller $a = 0$ och vilket b som helst.

Nu måste vi kolla att kanditaterna verkligen är lösningar. Och det är inte så svårt. Till exempel: Om $a = |a|$ och $b = |b|$ är

$$|a + b| = ||a| + |b|| = |a| + |b|.$$

C.4 Om $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ är ett polynom av grad n och det finns tal $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ så att $p(x_j) = 0$ för alla $j = 0, 1, \ldots, n$, då är $p(x) = 0$ för alla $x \in \mathbf{R}$ enligt sats 2.37.

Enligt sats 2.38 vet vi att om $p(x) = 0$ för alla $x \in \mathbf{R}$ så är $a_k = 0$ för alla $k = 1, 2, \ldots, n$.

C.5 Enligt uppgiften ovan måste vi lösa systemet

$$\begin{aligned} 2a - 5 &= 0 \\ 5b + c &= 0 \quad \text{och} \\ c - a &= 0. \end{aligned}$$

Vi räcknar att $a = 5/2$, $c = 5/2$ och $b = -1/2$.

C.7 Vi kan till och med bevisar att funktionerna är strängt växande:

(a) Om $x < y$ år $2x < 2y$ och $f(x) = 2x - 2 < 2y - 2 = f(y)$ så f är växande.

(b) Om $0 \leq x < y$ är $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) > 0$ ty $y - x > 0$ och $y + x > 0$.

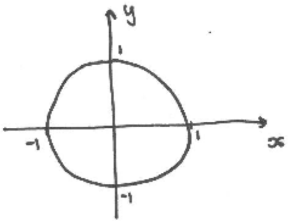
(c) Om $x < y$ är $f(y) - f(x) = y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + xy + x^2) > 0$ ty $y - x > 0$ och

$$y^2 + xy + x^2 = \frac{1}{2}\left((x + y)^2 + x^2 + y^2\right)$$

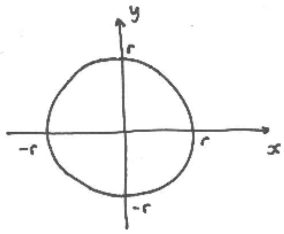
som är positivt för att högst ett av x och y kan vara noll.

Lektion C2

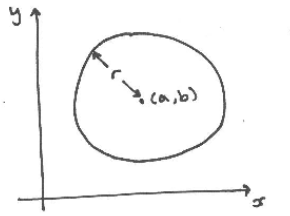
C.10



(a)

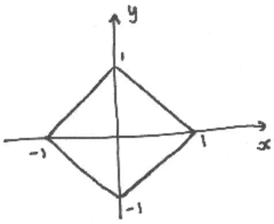


(b)

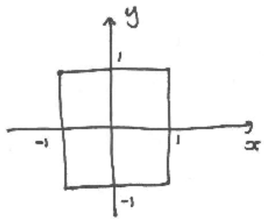


(c)

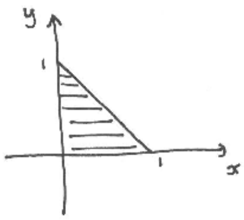
C.11



(a)



(b)



(c)

C.12 1.23 (a) $1 - \frac{2}{x^2+1}$

(b) $x^3 + x^2 + x + 1$

(c) $\frac{-3x+5}{x^2-7}$

(d) $x^2 - 2x + 3 + \frac{-2x+10}{x^2+4x+5}$

1.24 (a) $x^2 + 4x - 5 - \frac{7}{x-3}$

(b) $x - 5 + \frac{5-3x}{x^2-3x+1}$

1.25 (a) 0

(b) $2^{100} - 2^{67} + 2^{10} + 1$

(c) $1 - x$

Lektion D1

D.3 (a) Ja, $g^{-1}(x) = f^{-1}(x+2)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

(c) Nej, g är inte injektiv, ty $g(-x) = g(x)$.

(d) Nej, g är inte injektiv, ty det finns x_1 och x_2 så att $f(x_1) = -f(x_2)$ och i så fall är $g(x_1) = g(x_2)$.

D.4 (a) $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ för $1 \leq y \leq 9$.

(b) $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{om } 1 \leq y \leq 4 \\ -\sqrt{y} & \text{om } 9 \leq y \leq 16 \end{cases}$

D.5 (a) Uttrycket $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ är definierat om och endast om nämnaren i kvotet är nollskild och hela kvotet är icke-negativt. Nämnaren i kvotet är nollskild precis då $x \neq 1$. Och hela kvotet är icke-negativt när antingen $x+1 \geq 0$ och $x-1 \geq 0$, eller $x+1 \leq 0$ och $x-1 \leq 0$. Kraven kan omskrivas till kravet $x > 1$ eller $x \leq -1$. Därför definierar vi $D = (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$.

(b) Vill vill hitta alla möjliga värdena för y som kan uppstå genom uttycket

$$y = f(x) := \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

där vi sätta in $x \leq 1$ eller $x > 1$. Därför, för ett givet y måste vi hitta en lämplig lösning x som ge detta y: Först räkna

$$y = f(x) := \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \implies y^2 = \frac{x+1}{x-1} \implies (x-1)y^2 = (x+1) \iff x(y^2-1) = 1+y^2.$$

Om $y = \pm 1$ säger den sista likheten att $0 = 2$ som är ett motsägelse och visar då att det finns inget x så att $f(x) = \pm 1$. Därför kan varken 1 eller -1 tillhör till målmängden M om f ska vara surjektiv.
Om y är inte -1 eller 1 har vi visat att det ända möjliga värdet för x är $x = \frac{y^2+1}{y^2-1}$. Men eftersom vi visade bara att $x = \frac{y^2+1}{y^2-1}$ var ett nödvändigt villkor måste vi nu kolla implikationen åt andra hållet:

$$x = \frac{y^2+1}{y^2-1} \implies f(x) = f(\tfrac{y^2+1}{y^2-1}) = \sqrt{\frac{\frac{y^2+1}{y^2-1}+1}{\frac{y^2+1}{y^2-1}-1}} = \sqrt{\frac{(y^2+1)+(y^2-1)}{(y^2+1)-(y^2-1)}} = \sqrt{y^2}$$

och vi får $f(\frac{y^2+1}{y^2-1}) = y$ om och endast om $y \geq 0$ och $y \neq 1$. Därför dra vi slutsatsen att mängden av möjliga y-värden är $M = [0, 1) \cup (1, \infty)$.

(c) I (b) visade vi att $y = f(x) \implies x = \frac{y^2+1}{y^2-1}$, så det finns högst ett x för varje y så att $f(x) = y$. Därför är $f \colon D \to M$ injektiv.

(d) $f^{-1}(y) = \frac{y^2+1}{y^2-1}$.

Lektion D2

D.8 (a) Det är enklare att bevisa kontrapositionen: Om m är inte delbart med 3 då är m^2 inte delbart med 3.

Om m är inte delbart med 3 kan det skrivas som $m = 3k \pm 1$ för något heltal k. Då är

$$m^2 = (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$$

så m^2 är inte delbart med 3.

(b) Vi ger ett motsägelse bevis: Anta att c är rationellt och därför kan skrivas som $c = n/m$ där n och m är hela tal utan gemensamma delare. Vi räknar

$$3 = c^2 = \frac{n^2}{m^2} \implies 3m^2 = n^2.$$

Därför är n^2 delbart med 3 och enligt (a) är n delbart med 3, så $n = 3k$ för något heltal k. Återigen räknar vi

$$3m^2 = n^2 \text{ och } n = 3k \implies 3m^2 = 9k^2 \implies m^2 = 3k^2.$$

Därför är m^2 delbart med 3 och enligt (a) är m delbart med 3.

Att både n och m är delbart med 3 är ett motsägelse till antagandet att c kan skrivas som $c = n/m$ där n och m är hela tal utan gemensamma delare. Därför är c irrationellt.

D.9 (a) Det är enklare att bevisa kontrapositionen: Om m är inte delbart med 6 då är m^2 inte delbart med 6.

Om m är inte delbart med 6 kan det skrivas som $m = 6k + r$ för något heltal k och $r = 1, 2, 3, 4$ eller 5. Då är

$$m^2 = (6k + r)^2 = 6(6k^2 + 2kr) + r^2.$$

Vi vet att $r^2 = 1, 4, 9, 16$ eller 25 så r^2 är aldrigt delbart med 6, och därför är m^2 inte delbart med 6

(b) Vi ger ett motsägelse bevis: Anta att c är rationellt och därför kan skrivas som $c = n/m$ där n och m är hela tal utan gemensamma delare. Vi räknar

$$6 = c^2 = \frac{n^2}{m^2} \implies 6m^2 = n^2.$$

Därför är n^2 delbart med 6 och enligt (a) är n delbart med 6, så $n = 6k$ för något heltal k. Återigen räknar vi

$$6m^2 = n^2 \text{ och } n = 6k \implies 3m^2 = 36k^2 \implies m^2 = 6k^2.$$

Därför är m^2 delbart med 6 och enligt (a) är m delbart med 6.

Att både n och m är delbart med 6 är ett motsägelse till antagandet att c kan skrivas som $c = n/m$ där n och m är hela tal utan gemensamma delare. Därför är c irrationellt.

D.10 Till exempel är $m = 6$ är inte jämnt delbart med 9 men $m^2 = 6^2 = 36$ är delbart med 9.

D.11 Det finns flera möjliga generaliseringar av sats 3.3. Här är två möjliga svar.

Sats. *Låt p vara ett primtal. Då är lösningar c till $c^2 = p$ irrationella.*

Sats. *För olika primtal $p_1 < p_2, \cdots < p_k$ definiera $y = \pi_{j=1}^{k} p_j$. Då är lösningar c till $c^2 = y$ irrationella.*

Lektion E1

E.3 (a) Vi skriver om (3.22) med $\varphi = \theta$ och får

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \underset{\substack{\uparrow \\ (3.21)}}{=} 2\cos^2\theta - 1$$

så

$$\sin^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}.$$

(b) Vi skriver om (3.22) med $\varphi = \theta$ och får

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \underset{\substack{\uparrow \\ (3.21)}}{=} 1 - 2\sin^2\theta$$

så

$$\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}.$$

E.4 Sats 3.10 tillsammans med $\sin 0 = 0$ och $\sin(\pi/2) = 1 < \pi/2$ medför att $\sin\theta \leq \theta$ för $\theta \in [0, \pi/2]$. Dessutom är $\sin\theta \geq 0$ för $\theta \in [0, \pi/2]$. Därför är $\sin^2\theta \leq \theta^2$ och

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \geq 1 - \theta^2$$

för $\theta \in [0, \pi/2]$.

Nu visa vi att $\cos\theta \geq 1 - \theta$ $\theta \in [0, \pi/2]$. Vi betrakta två fall: $\theta \in [1, \pi/2]$ och $\theta \in [0, 1)$.

Om $\theta \in [1, \pi/2]$ är $1 - \theta^2 \leq 0$ och vi vet redan att $\cos\theta \geq 0$ så

$$\cos\theta \geq 0 \geq 1 - \theta.$$

Om $\theta \in [0, 1)$ kan vi skriva $1 - \theta^2 = (1+\theta)(1-\theta) \geq (1-\theta)(1-\theta) = (1-\theta)^2$ så

$$\cos^2\theta \geq 1 - \theta^2 \geq (1-\theta)^2.$$

Eftersom både $\cos\theta$ och $1 - \theta$ är positiva för $\theta \in [0, 1)$ dra vi slutsatsen att återigen är

$$\cos\theta \geq 1 - \theta.$$

E.5 (a) Triangels höjd h uppfyllar både $h = b\sin\theta$ och $h^2 + (a - b\cos\theta)^2 = c^2$ så

$$c^2 = h^2 + (a - b\cos\theta)^2 = b^2\sin^2\theta + a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta = b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta$$

enligt (3.21).

(b) Cosinussatsen och figuren säger att

$$a^2 = 4 + 4 - 8\cos(\pi/6) = 2(4 - 2\sqrt{3}) = 2(\sqrt{3} - 1)^2$$

och eftersom a är positivt är $a = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$. Därför är

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(a/2)}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Från Pythagoras sats (sats 3.2) uppfyller triangelns höjd h ekvationen $2^2 = a^4/2^2 + h^2$ så

$$h^2 = 4 - \frac{2(4-2\sqrt{3})}{4} = \frac{2(4+2\sqrt{3})}{4} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$$

och därmed är

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{h}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}.$$

Lektion E2

E.8 Om n är jämnt kan vi skriva $\cos n\pi = \cos(2k\pi)$ för någon heltal k. Värdet av $\cos(2k\pi) = 1$ för alla k eftersom vinklen $2k\pi$ är ett antal hela varv kring enhetscirklen från snittet med den positiva x-axeln.

Om n är udda kan vi skriva $\cos n\pi = \cos(2k\pi + \pi)$ för någon heltal k. Värdet av $\cos(2k\pi + \pi) = \cos(2k\pi)\cos\pi - \sin(2k\pi)\sin\pi = 1 \times (-1) - 0 \times 0 = -1$ för alla k. (Man kan också argumentera vinklen $2k\pi + \pi$ är ett antal hela varv kring enhetscirklen från snittet med den positiva x-axeln plus en halv varv till, och därför är $\cos(2k\pi + \pi) = -1$.)

E.9 2.46 (a) $v = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ och $v = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ för alla heltal n.

(b) $v = \frac{\pi}{4} + \pi n$ för alla heltal n.

(c) Alla $v \in \mathbf{R}$ är lösningar.

2.47 (a) $v = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ för alla heltal n.

(b) $v = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ för alla heltal n.

E.10 2.71 (a) $\arcsin 0 = 0$ och $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

(b) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ och $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

(c) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ och $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

(d) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ och $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

(e) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ och $\arccos(-1) = \pi$.

(f) Ej definierad i $\sqrt{3}$.

2.74 (a) $-\frac{\pi}{7}$

(b) $\frac{3\pi}{5}$

(c) $\frac{\pi}{5}$

Lektion F1

F.3 Vi räknar;

(a) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) = \sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$;

(b) $\exp(2x) = \exp(x)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$;

(c) $\exp(2x+2y) = \exp(2(x+y)) = \exp(x+y)^2 = 4^2 = 16$ enligt (a).

F.4 Likheten $\exp(2x+3) = \exp(2x) + \exp(3)$ är ekvivalent med $\exp(3)\exp(x)^2 = \exp(x)^2 + \exp(3)$ som är ekvivalent med $\exp(x)^2 = \exp(3)/(\exp(3)-1)$ så möjliga värden för $\exp(x)$ är $\pm\sqrt{\exp(3)/(\exp(3)-1)}$.

F.5 Vi skriver om definitionen (4.3) i fallet $x = 1$: Den säger att

$$e = \sup_{n>1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

och där för är e en övre begränsning av $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ för alla heltal $n > 1$. Det betyder att

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \tag{$*$}$$

för alla $n > 1$. Men $(*)$ gäller även för $n = 1$ eftersom

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 \leq \frac{9}{4} = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \leq e$$

enligt $(*)$ med $n = 2$.

För den övre begrånsningen till e tittar vi på sats 4.3. Det står att det finns en funktion B så att $e \leq B(1)$, men om vi läser beviset finns det även ett uttryck för B. Utifrån detta kan vi räkna

$$B(1) = \left(1 - \frac{1}{1+1}\right)^{-(1+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2},$$

så

$$e \leq B(1) = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

Om vi lägger ihopp olikheten ovan med $(*)$ i fallet $n = 2$ får vi att $9/4 \leq e \leq 4$.

F.6 Betrakta godtyckliga $x < y$. Vi räknar

$$\exp(y) = \exp(x + (y-x)) = \exp(x)\exp(y-x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Del 2 av sats 4.4}}}{\geq} \exp(x)(1+(y-x)) \underset{\substack{\uparrow \\ y-x>0 \text{ och } \exp(x)>0}}{>} \exp(x)$$

så $\exp(y) > \exp(x)$ och därmed har vi bevisat att exp är strängt växande.

Lektion F2

F.10 (a) För $x > 1$ är

$$\begin{aligned}\exp(\ln(\sqrt{x+1}) + \ln(\sqrt{x-1})) &= \exp(\ln(\sqrt{x+1}))\exp(\ln(\sqrt{x-1})) \\ &= \sqrt{x+1}\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2-1}.\end{aligned}$$

(b) För $x \in \mathbf{R}$ är

$$\begin{aligned}2\ln\left(\exp\left(\sqrt{x+1}\right)\exp\left(\sqrt{x-1}\right)\right) &= 2\ln\left(\exp\left(\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}\right)\right) \\ &= 2\left(\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}\right) = 2\sqrt{x^2-1}.\end{aligned}$$

Lektion G1

G.5 Betrakta två komplexa tal $w = u + iv$ och $z = x + iy$ för $u, v, x, y \in \mathbf{R}$. Vi räknar att

$$\overline{w}\,\overline{z} = (u - iv)(x - iy) = (ux - vy) - i(vx + uy)$$

och

$$\overline{wz} = \overline{(u + iv)(x + iy)} = \overline{(ux - vy) + i(vx + uy)} = (ux - vy) - i(vx + uy)$$

så $\overline{wz} = \overline{w}\,\overline{z}$.

Vi kan också räkna att

$$\begin{aligned}\overline{w + z} &= \overline{(u + iv) + (x + iy)} = \overline{(u + x) + i(v + y)} \\ &= (u + x) - i(v + y) = (u - iv) + (x - iy) = \overline{w} + \overline{z}.\end{aligned}$$

Lektion G2

G.8 Betrakta ett polynom $P(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$ med reella koefficienter a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Genom att ta konjugatet av bägge led i ekvationen $P(z) = 0$ får vi att $\overline{P(z)} = \overline{0} = 0$ och därför är

$$0 = \overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z}^k = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{z}^k = P(\overline{z}).$$

G.9 Observera att högerledet av ekvationerna i del 3 och 4 av sats 4.10 är definierade för komplexa θ och är lika med cosinus respektive sinus funktioner i fallet $\theta \in \mathbf{R}$. Därför om vi definierar

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{och} \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

för alla komplexa θ har vi utvidgat de trigonometriska funktionerna från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{C}$.