Inledande matematisk analys (TATA79)

Höstterminen 2017

Modul B: Mängder, följder och induktion

Förberedelse

B.1 Läs avsnitt 2.3 och 2.4 av *Ge svar på tal.*

Lektion B1: Summor och induktion

Grupparbete

† B.2 Gör uppgift 7.2 från Henrik Peterssons *Undersökande matematik*. Detta material är borttaget från hemsidans version för att det är skyddat enligt lagen om upphovsrätt.

Självstudieuppgifter

B.3 Ge en induktionsbevis av de följande likheter som gäller för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

(a)
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2} = \frac{n^2}{2}$$

(b)
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

B.4 Ge en induktionsbevis av de följande olikheter.

(a) $4n \leq 2^n$ för alla heltal $n \geq 5$.

(b) $2n+1 \leq 2^n$ för alla heltal $n \geq 3$.

B.5 Ge en induktionsbevis av formeln i avsnitt 2.4.1 för summan av en geometrisk följd $(ar^{i-1})_{i\in\mathbf{Z}_+}$ med kvoten r:
$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$$
där $a \in \mathbf{R}$ och $r \neq 1$.

B.6 Hitta vad är fel med de följande induktionsbevisen.

(a)

Sats. *$k^2 \leq k$ för alla $k \in \mathbf{Z}_+$.*

Bevis. Vi kan lätt kolla att bas fallet stämmer, det vill säga, om vi tar $k = 1$ så är $k^2 = 1^2 \leq 1 = k$.

Nu antar vi att satsen gäller för $k = n$ för något givna $n \in \mathbf{Z}_+$ och betraktar fallet $k = n+1$. I fallet $k = n+1$ har vi att
$$(n+1)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satsen med } k=n+1}}{\leq} (n+1) \leq 3n+1 \iff n^2+2n+1 \leq 3n+1 \iff n^2 \leq n.$$

Men $n^2 \leq n$ stämmer enligt induktionsantagandet, så satsen är bevisad. □

(b)

Sats. $2k = 0$ *för alla* $k \in \mathbf{N}$.

Bevis. Vi först kollar att bas fallet stämmer: Vi tar $k = 0$ så är $2k = 2 \times 0 = 0$ och därför gäller satsen om $k = 0$.
Nu antar vi att satsen gäller för alla $k \leq n$ för något givna $n \in \mathbf{Z}_+$ och betraktar fallet $k = n + 1$. Vi skriver $n + 1 = i + j$ där i och j är två icke-negativa tal mindre än eller lika med n. Då får vi säger att

$$2(n + 1) = 2(i + j) = 2i + 2j = 0 + 0 = 0$$

enligt induktionsantagandet, så satsen är bevisad. □

(c)

Sats. $k + 1 < k$ *för alla* $k \in \mathbf{Z}_+$.

Bevis. Som vanligt antar vi att satsen gäller för $k = n$ för något givna $n \in \mathbf{Z}_+$ och betraktar fallet $k = n + 1$: Enligt induktionsantagandet är

$$(n + 1) + 1 < (n) + 1 = (n + 1)$$

som är satsen i fallet $k = n + 1$. Enligt induktionsprincipen är satsen bevisad. □

Förberedelse för föreläsning B: Mängder, följder och induktion

B.7 Läs om avsnitt 2.3 och 2.4 av *Ge svar på tal*. Koncentrera på begreppen *uppåt* och *nedåt begränsad* samt *minst övre* och *största under begränsning*.

Lektion B2: Mängder, följder, supremum och infimum

Grupparbete

B.8 Betrakta följden $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ definierat enligt

$$a_n = \frac{n}{1 + n^2}$$

för varje positivt tal n. Eftersom en följd är bara en vanlig mängd tillsammans med en ordning på elementen kan vi ställa frågor som: Är $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ begränsad? Och: Har den en minsta övre begränsing? Den här uppgift handla om att utreda sådana egenskaper hos $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$.

(a) Utred med bevis om $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ är uppåt begränsad.

(b) Utred med bevis om $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ har en minst övre begränsning. Vad är sin värde?

(c) Har $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ ett *största element*? Det vill säga, finns det ett m så att $a_m \geq a_n$ för alla positiva n?

(d) Utred med bevis om $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ är nedåt begränsad.

(e) Utred med bevis om $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ har en största undre begränsning. Vad är sin värde?

(f) Har $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ ett *minsta element*? Det vill säga, finns det ett m så att $a_m \leq a_n$ för alla positiva n?

Självstudieuppgifter

B.9 Vilka av de följande mängderna är lika med intervallet $[0, 4]$? Motivera ditt svar.

(a) $\{x \in \mathbf{R} \mid 4x - 7 \geq 2 \text{ och } x \leq 4\}$

(b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 + 4 < 12 - 8x\}$

(c) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2x + 1 \leq 1 \text{ eller } 8 \leq 6x - x^2\}$

(d) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x \leq 0 \text{ och } 8 \leq 6x - x^2\}$

(e) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x < 0,\ x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ eller } x^2 + 8 = 6x\}$

B.10 Bevisa att följden $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ definierad genom uttrycket

$$a_n = \frac{n^n}{(2n)!}$$

för varje $n \in \mathbf{Z}_+$ är uppåt begränsad. [Tips: Försök jämföra $(2k)!$ med k^k.]

B.11 (a) Bevisa att $\inf A = 3$ och $\sup A = 7$ där $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 10x + 25 < 4\}$.

(b) Tillhör 3 eller 7 till mängden A?

(c) Bevisa att $\inf B = 2$ och $\sup B = 7$ där $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 4x^2 - 36x + 81 \leq 25\}$.

(d) Tillhör 2 eller 7 till mängden B?

(e) Bevisa att $\inf C = 1$ och $\sup C$ finns ej där $C = \{x \in \mathbf{R} \mid x > -1 \text{ och } x^2 + 4x - 5 \geq 0\}$.

B.12 Utred med bevis om mängden

$$\{y \in \mathbf{R} \mid y = (x-1)(x+5) \text{ och } x \in [-6, 2]\}$$

har in infimum eller supremum. I fallet de existera bestäm deras värde.

Inlämningsuppgifter

B.13 Gör inlämningsuppgift B och lämna de in till din handledare eller i gruppens fack som ligger i korridoren 2A, B-huset, mellan ingångar 21 och 23. **Du får lämna in de senast den 7:e november 2017** och får återkoppling inom två dagar (kolla facket om du har inget handledningstillfälle). Inlämning av eventuell komplettering samt hämtning av återkoppling skers på samma sätt. **Komplettering får lämnas in senast den 27:e november 2017.**