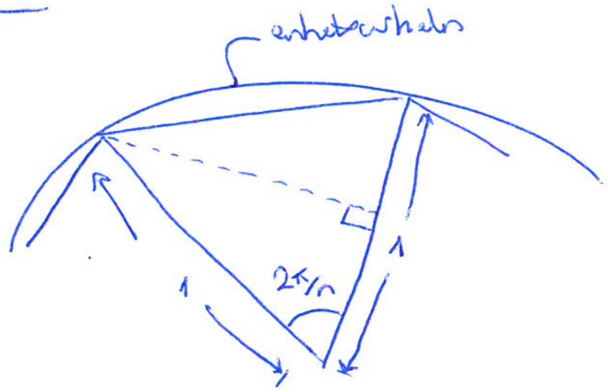
LEKTION 8

2 (a)



Vi kan dela upp det regelbundna polygonet i n stycken kongruenta trianglar enligt figuren ovan. Arean av en triangel är

$$\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\cdot 1$$

och det finns n stycken. Arean av enhetscirkeln är större än polygonen så

$$\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leq A .$$

3.

(a) $$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) \overset{(3.21)}{=} \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$$
$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\underset{(3.20)}{=} \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} .$$

4. (3.20) säger att

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

men sats 3.10 säger $\sin\theta < \theta$ för $\theta \in (0, \pi/2)$. För $\theta = 0$ eller $\pi/2$ gäller $\sin\theta \leq \theta$ så därför är $\sin^2\theta \leq \theta^2$ (eftersom $\sin\theta \geq 0$ för $\theta \in [0, \pi/2]$) och

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \geq 1 - \theta^2$$

För $\theta \in [0, \pi/2]$ är $\cos\theta \geq 0$ men $1-\theta \leq 0$ om $\theta \in [1, \pi/2]$ (2)

så

$$\cos\theta \geq 0 \geq 1-\theta$$

Om $\theta \in [0,1]$ är

$$\begin{aligned}\cos^2\theta \geq 1-\theta^2 &= (1-\theta)(1+\theta)\\ &\geq (1-\theta)(1+0)\\ &\geq (1-\theta)(1-\theta) = (1-\theta)^2 \geq 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos\theta \geq (1-\theta)$$

Så för alla $\theta \in [0, \pi/2]$ har vi visat att

$$\cos\theta \geq 1-\theta.$$

För (a) och (b) delar se nästa blad.

Inledande matematisk analys (TATA79)
Höstterminen 2016
Lektion 8, uppgift 4

(a) Den rätvinkliga triangeln på vänstersidan av figur 1(a) har sidolängderna c, $a - b\cos\theta$ och $b\sin\theta$. Hypotenusan har längden c. Då säger sats 3.2 att

$$c^2 = (a - b\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2 = a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta = a^2 - 2ab\cos\theta + b^2.$$

(b) Delar triangeln i figur 1(b) längst mittan, så man får två rätvinkliga trianglar med sidolängder 2 och $a/2$ och en vinkel $\pi/12$. Tredje sidan har längden $\sqrt{4 - a^2/4} = (\sqrt{16 - a^2})/2$. Därför är

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{a/2}{2} \quad \text{och} \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{16 - a^2})/2}{2}.$$

Cosinussatsen säger att

$$\begin{aligned} a^2 &= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2\cos(\pi/6) \\ &= 8 - 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 2(4 - 2\sqrt{3}) \\ &= 2(\sqrt{3} - 1)^2, \end{aligned}$$

så

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4} = \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2}}.$$

Dessutom är

$$\begin{aligned} 16 - a^2 &= 16 - 2(4 - 2\sqrt{3}) = 2(4 + 2\sqrt{3}) \\ &= 2(\sqrt{3} + 1)^2, \end{aligned}$$

så

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4} = \frac{(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{2}}.$$

Senast ändrad: 22 november 2016.