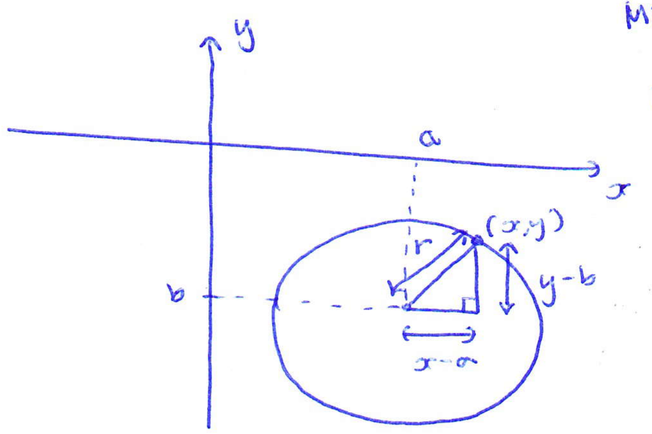
LEKTION 6

1 (c)



Mängden $\{(x,y) \mid (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$ är alla punkter som ligger avstånd r från punkten (a,b).

2 (b) Värdet $|x+y|$ beror på tecken av $x+y$: om $x+y \geq 0$ är $|x+y| = x+y$; om $x+y<0$ är $|x+y| = -(x+y)$

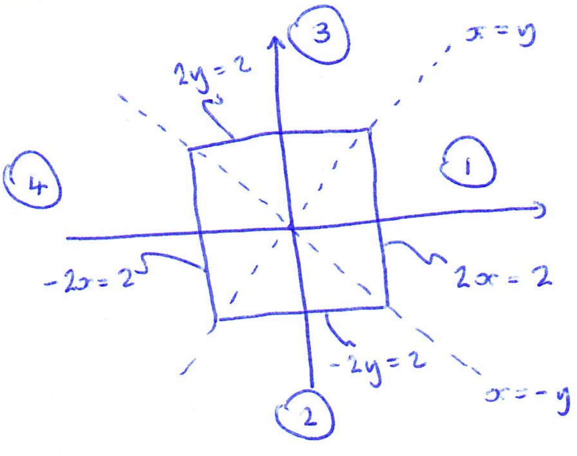
Samt

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{om } x-y \geq 0 \\ -(x-y) & \text{om } x-y<0 \end{cases}$$

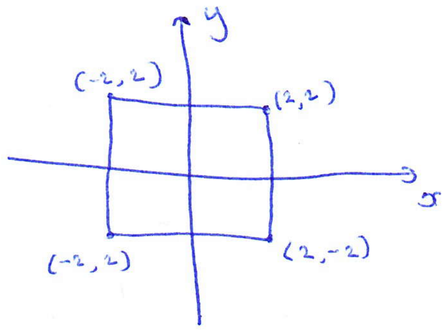
Så vi kan betrakta fyra fall:

1. $x \geq y$ och $x \geq -y$: $|x+y|+|x-y| = (x+y)+(x-y) = 2x$
2. $x \geq y$ och $x < -y$: $|x+y|+|x-y| = -(x+y)+(x-y) = -2y$
3. $x<y$ och $x \geq -y$: $|x+y|+|x-y| = (x+y)-(x-y) = 2y$
4. $x<y$ och $x<-y$: $|x+y|+|x-y| = -(x+y)-(x-y) = -2x$

Därför kan vi skissa:



Det vill säger mängden ser ut så här :



4 (a) För att visa

$$m^2 \text{ är delbart med } 3 \Rightarrow m \text{ är delbart med } 3 \qquad (*)$$

räcker det att bevisa kontrapositionen:

$$m \text{ är inte delbart med } 3 \Rightarrow m^2 \text{ är inte delbart med } 3$$

Om m är inte delbart med 3 så är

$$m = 3k + r \quad \text{där } k \in \mathbb{Z} \text{ och } r = 1 \text{ eller } 2$$

$$\Rightarrow m^2 = (3k+r)^2 = 9k^2 + 6k + r^2 = 3(3k^2 + 2k) + r^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 & \text{om } r = 1 \\ m^2 = 3(3k^2 + 2k + 1) + 1 & \text{om } r = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m^2 \text{ är inte delbart med } 3$$

Därför är $(*)$ bevisad.

(b) Anta att $c^2 = 3$ och c är rationellt. Då kan vi skriva

$$c = \frac{n}{m} \quad \text{där } n \in \mathbb{Z} \text{ och } m \in \mathbb{N} \text{ och}$$

n och m inte har någon gemensam delare

Vi vet att

$$3 = c^2 = \frac{n^2}{m^2} \Rightarrow n^2 = 3m^2 \Rightarrow n^2 \text{ är delbart med } 3$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} n \text{ är delbart med } 3$$

$$\Rightarrow n = 3k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}$$

Därför är

$$3 = c^2 = \frac{n^2}{m^2} = \frac{(3k)^2}{m^2} = \frac{9k^2}{m^2} \Rightarrow m^2 = 3k^2 \Rightarrow m^2 \text{ är delbart med } 3$$

$$\Rightarrow m \text{ är delbart med } 3.$$

Därför har n och m en gemensam delare (som är 3) — en motsägelse

Så vi drar slutsatsen att om $c^2 = 3$ så är c irrationellt.

6 Betrakta $m = 6$. Då är $m^2 = 36$ som är delbart med 9 men $m = 6$ är inte delbart med 9.