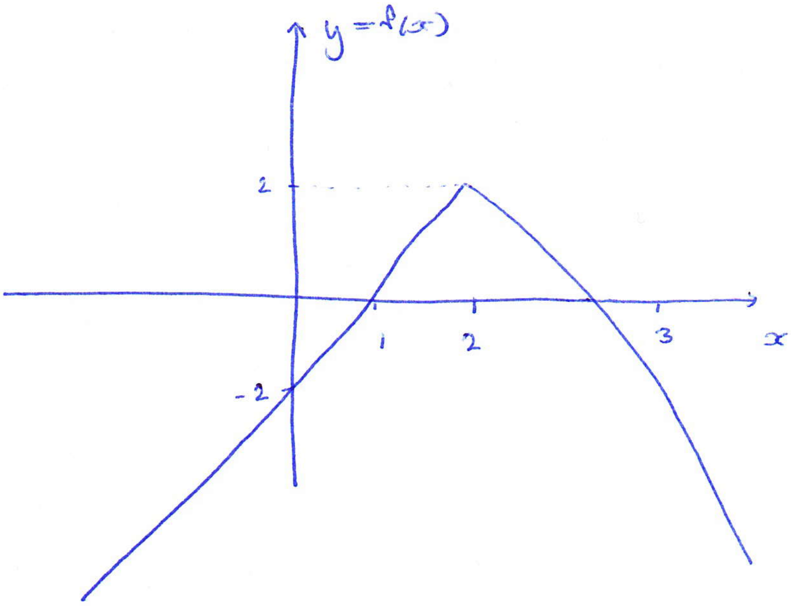
Lektion 5

1 (b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{om } x \leq 2; \\ 2 + 2x - x^2 = 3 - (x-1)^2 & \text{om } x > 2. \end{cases}$



2 (a) $x < y \Rightarrow 2x \leq 2y \Rightarrow 2x - 2 \leq 2y - 2 \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

2 positivt

så f är växande

(b) $0 \leq x < y \Rightarrow \begin{cases} xy < y^2 \\ x^2 \leq xy \end{cases} \Rightarrow x^2 \leq xy < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2$

$\Rightarrow f(x) = x^2 \leq y^2 = f(y)$

y positivt
x icke-negativt

så f är växande

(c) ~~Fall~~ För godtyckliga $x < y$ kan vi betrakta tre olika fall:

(1) $0 \leq x < y$

(2) $x < y \leq 0$

(3) $x \leq 0 \leq y$

(1) För $0 \leq x < y$ är $y - x > 0$ och

$$y^3 - x^3 = \underbrace{(y-x)}_{>0}\underbrace{(y^2 + xy + x^2)}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow f(y) - f(x) \geq 0$$

ty x och x inte negativa.

$$\Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

(2) För $x < y \leq 0$ är $y - x > 0$ och

$$y^3 - x^3 = \underbrace{(y-x)}_{>0}\underbrace{(y^2 + xy + x^2)}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$$

ty x och y icke-positiva

$$\Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

(3) För $x \leq 0 \leq y$ är $f(x) \leq f(0)$ och $f(0) \leq f(y)$

ty $x \leq 0$ och i fall (1) gäller $f(x) < f(0)$ om $x < 0$ eller $f(x) = f(0)$ om $x = 0$

ty $0 \leq y$ och i fall (2) gäller $f(0) < f(y)$ om $0 < y$ eller $f(0) = f(y)$ om $0 = y$.

Därför är $f(x) \leq f(0) \leq f(y) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

I alla tre fall är $f(x) \leq f(y)$ dvs att f är växande.

3 Definiera $g : [-4, \infty) \to \mathbb{R}$ enligt formeln

$$g(x) = x^2 + 8x + 17 \text{ för alla } x \in [-4, \infty)$$

Vi kan skriva om $g(x) = (x+4)^2 + 1$ så

$$-4 \leq x < y \Rightarrow 0 \leq x+4 < y+4 \Rightarrow \begin{cases} (x+4)^2 \leq (y+4)(x+4) \\ (y+4)(x+4) < (y+4)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+4)^2 \leq (y+4)(x+4) < (y+4)^2$$

$$\Rightarrow (x+4)^2 < (y+4)^2 \Rightarrow (x+4)^2+1 < (y+4)^2+1$$

$$\Rightarrow g(x) < g(y)$$

så g är strängt växande.

Definiera $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ enligt formeln

$$h(x) = x^2 + 8x + 17 = (x+4)^2 + 1 \text{ för alla } x \in \mathbb{R}.$$

Eftersom $-5 < -4$ och $h(-5) = (-5+4)^2+1 = 2 > 1 = (-4+4)^2+1 = h(-4)$

är h inte växande.

Eftersom $-4 < -3$ och $h(-4) = 1 < 2 = (-3+4)^2+1 = h(-3)$ är

h inte avtagande.