Inledande matematisk analys

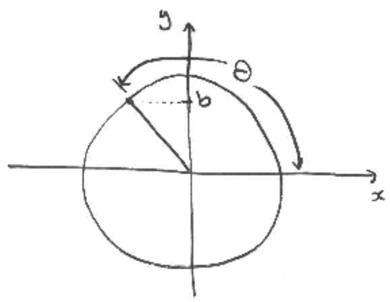
1.

(a) Definiera med hjälp av en bild funktionen $\sin\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(b) Bevisa att $\sin\theta < \theta$ för $\theta \in (0, \pi/2)$. Du får använda en bild som stöd för ditt bevis.

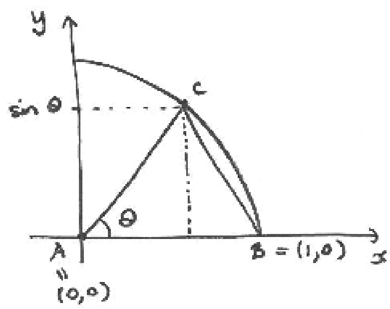
Solution:

(a) Nedan finns en bild av enhetscirklen med medelpunkt i origo. Värdet $\sin\theta$ definieras som b där man går moturs runt cirklen på ett avstand θ från punkten $(1, 0)$:



(b) Bilden nedan visa att trianglen ABC har strängt mindre area än kilen ABC. Vi kan räkna ut att trianglen har arean $\frac{1}{2} \times 1 \times \sin\theta$ och kilen har arean $\frac{1}{2} \times \theta$. Därför är

$$\frac{\sin\theta}{2} < \frac{\theta}{2} \implies \sin\theta < \theta.$$



2.

Hitta alla $x \in \mathbf{R}$ som löser ekvationen

$$3\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3}.$$

Solution:

Om vi jämför vänsterledet med

$$A\sin(v + x) = A\sin(v)\cos(x) + A\cos(v)\sin(x)$$

ser vi att det är hjälpsam att hitta A och v så att

$$\begin{aligned} A\sin(v) &= 3 \quad \text{och} \\ A\cos(v) &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Om vi delar den första ekvation ovan med den andra får vi att $\tan v = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$ så till exempel kan vi ta $v = \pi/3$. Sen behöver vi att $A^2 = A^2\sin^2 v + A^2\cos^2 v = 3^2 + 3 = 12$. Eftersom $\sin(\pi/3)$ och $\cos(\pi/3)$ är positiva måste vi ta $A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Därför kan vi skriva om ekvation som

$$2\sqrt{3}\sin(\pi/3 + x) = 3\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3} \iff \sin(\pi/3 + x) = \frac{1}{2}.$$

Då vet vi att antingen

$$\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{för } k \in \mathbf{Z}$$

eller

$$\frac{\pi}{3} + x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{för } k \in \mathbf{Z}$$

så alla möjliga lösningar är

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{för } k \in \mathbf{Z}, \text{ och} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{för } k \in \mathbf{Z}.$$

3.

(a) Kom ihåg att $\exp(x) \geq 1 + x$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Använd den tillsammans med andra räknareglar för att visa

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}$$

för $x < 1$.

(b) Skissa grafen av exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to (0, \infty)$.

Solution:

(a) Vi vet att $\exp(-x) \geq 1 - x$ och $\exp(x) > 0$ så

$$\exp(x)\exp(-x) \geq \exp(x)(1 - x).$$

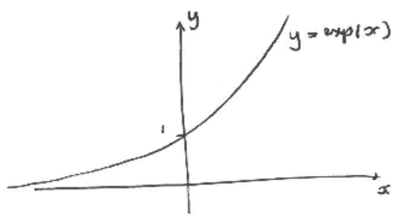
Men $\exp(x)\exp(-x) = 1$, så

$$1 \geq \exp(x)(1 - x).$$

Om $x < 1$ kan vi delar med $1 - x$ och får

$$\frac{1}{1 - x} \geq \exp(x).$$

(b) Graphen av exp:



4.

(a) Låt y vara en godtyckligt reellt tal. Visa att ekvationen

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

har en unik lösning $x \in \mathbf{R}$ som ges av $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

(b) Skissa grafen av funktion $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definieras som

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$.

Solution:

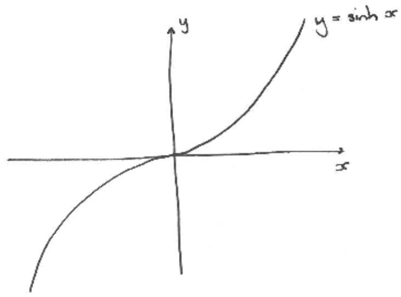
(a) Vi kan skriva om ekvationen som

$$\begin{aligned} 0 = e^x - 2y - e^{-x} &\iff 0 = e^{2x} - 2ye^x - 1 \\ &\iff 0 = (e^x - y)^2 - y^2 - 1 \\ &\iff y^2 + 1 = (e^x - y)^2 \\ &\iff y \pm \sqrt{y^2 + 1} = e^x \end{aligned}$$

Men eftersom $e^x > 0$ kan vi inte ha $e^x = y - \sqrt{y^2 + 1}$ som är negativt, så

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

(b) Graphen av sinh:



5.

(a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Låt $b > 1$. Visa att funktionen $x \mapsto b^x$ är bijektiv och ge en formel för den inversa funktionen.

Solution:

(a) $a^x := \exp(x \ln(a))$ för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) För givet $y \in (0, \infty)$ vill vi vissa att det finns precis en lösning $x \in \mathbf{R}$ till $y = b^x$:

$$y = b^x \iff y = \exp(x \ln(b)) \iff \ln(y) = x \ln(b) \underset{\substack{\uparrow \\ \ln(b) > 0}}{\iff} x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$$

(Eftersom $y = b^x \implies x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$ är $x \mapsto b^x$ injektiv och eftersom $y = b^x \impliedby x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$ är $x \mapsto b^x$ surjektiv, därför är $x \mapsto b^x$ bijektiv.) Formeln för inversa funktionen är då $y \mapsto \ln(y)/\ln(b)$.

6.

(a) Hitta alla $w \in \mathbf{C}$ så att $w^2 = 3 + 4i$.

(b) Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ så att $z^2 + (2 + 2i)z - 3 - 2i = 0$.

Solution:

(a) Sätt $w = u + iv$ för $u, v \in \mathbf{R}$. Då är $u^2 - v^2 + 2uvi = (u + iv)^2 = 3 + 4i$ så

$$u^2 - v^2 = 3 \quad \text{och} \tag{1}$$
$$2uv = 4. \tag{2}$$

Men eftersom $|w|^2 = |3 + 4i|$ är

$$u^2 + v^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5. \tag{3}$$

Om vi adderar (1) och (3) får vi att $2u^2 = 8$ och om vi subtraherar (1) från (3) får vi att $2v^2 = 2$. Så

$$u = \pm 2 \quad \text{och} \quad v = \pm 1.$$

Ekvation (2) säger att u och v har samma tecken, så vi har bara två möjligheter: $u = 2$ och $v = 1$, eller $u = -2$ och $v = -1$. Därför är lösningar $w = 2 + i$ och $w = -2 - i$.

(b) Vi kan skriva om $z^2 + (2 + 2i)z - 3 - 2i = 0$ som $(z + (1 + i))^2 = 3 + 4i$ så enligt första delen av uppgiften är

$$z + (1 + i) = 2 + i \quad \text{eller} \quad z + (1 + i) = -2 - i.$$

Därför alla lösningar är $z = 1$ och $z = -3 - 2i$.

7.

(a) Definiera $e^{i\theta}$ för $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Bevisa Eulers identitet:
$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Solution:

(a) $e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$ för $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Eftersom $\cos\pi = -1$ och $\sin\pi = 0$ så är

$$e^{i\pi} + 1 = \cos\pi + i\sin\pi + 1 = -1 + i0 + 1 = 0.$$
