Inledande matematisk analys

1.

(a) Definiera a^n för $a \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{N}$, och a^{-n} för $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ och $n \in \mathbf{N}$.

(b) Bevisa att $(ab)^n = a^n b^n$ för $a, b \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{N}$.

(c) Skriva $0.325325325\ldots$ (det vill säger $a_{3k-2} = 3$, $a_{3k-1} = 2$ och $a_{3k} = 5$ för $k \in \mathbf{N}$) som ett bråk.

Solution:

(a) a^n och a^{-n} för $a \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{N}$.

$$a^n := \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ gånger}}$$

för reella tal a och positiva heltal n. Vi definierar

$$a^{-n} := (a^{-1})^n$$

för reella tal $a \neq 0$ och positiva heltal n.

(b) Vi får att

$$\begin{aligned}
a^n b^n &= \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ gånger}}\underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ gånger}} \\
&= (ab) \underbrace{aa\ldots a}_{(n-1) \text{ gånger}} \underbrace{bb\ldots b}_{(n-1) \text{ gånger}} \\
&= (ab)(ab) \underbrace{aa\ldots a}_{(n-2) \text{ gånger}} \underbrace{bb\ldots b}_{(n-2) \text{ gånger}} \\
&= \cdots = \underbrace{(ab)(ab)\ldots(ab)}_{n \text{ gånger}} = (ab)^n.
\end{aligned}$$

(c) Sätt $x = 0.325325325\ldots$. Så $1000x = 325.325325325\cdots = 325 + x$. Därför är $999x = 325$ och $x = 325/999$.

2.

(a) Definiera vad det betyder att säga ℓ är en infimum till en mängd A.

(b) Betrakta följderna $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ som definieras enligt

$$a_n = \frac{n+3}{n} \quad \text{och} \quad b_n = -\frac{3}{n}$$

för alla $n \in \mathbf{N}$.

(i) Bevisa att $\inf_n a_n = 1$.

(ii) Bevisa att $\inf_n b_n = -3$.

Solution:

(a) Det betyder att

(i) $\ell \leq a$ för alla $a \in A$, och

(ii) för varje $\varepsilon > 0$ finns det $a \in A$ så att $a < \ell + \varepsilon$.

(b) (i) i. $n + 3 \geq n$ så $a_n = (n+3)/n \geq 1$ för alla $n \in \mathbf{N}$.

ii. Betrakta $\varepsilon > 0$. Vi vill hitta ett $n \in \mathbf{N}$ så att

$$1 + \frac{3}{n} = \frac{n+3}{n} = a_n < 1 + \varepsilon.$$

Olikheten är uppfylld om vi väljer n att vara ett naturligt tal större än $3/\varepsilon$.

(ii) i. Observera att $n \geq 1$ för alla $n \in \mathbf{N}$ som medför att $1/n \leq 1$ och i sin tur är $b_n = -3/n \geq -3$ för alla $n \in \mathbf{N}$.

ii. Betrakta $\varepsilon > 0$. Vi vill hitta ett $n \in \mathbf{N}$ så att

$$-\frac{3}{n} = b_n < -3 + \varepsilon.$$

Det räcker att ta $n = 1$ eftersom $-\frac{3}{1} = b_1 < -3 + \varepsilon$.

---

3. Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - k) = n^2(n+1).$$

Solution:

Vi använder induktion.

Om $n = 0$ är vänsterledet $\sum_{k=1}^{1}(3k^2 + k) = 3 \times 1^2 - 1 = 2$ och högerledet är $1^2(1+1) = 2$ så likheten stämmer då.

Nu antar vi att likheten stämmer för $n = m$ och vi betraktar likheten då $n = m + 1$. Vi får att

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}(3k^2 - k) &= \sum_{k=1}^{m}(3k^2 - k) + (3(m+1)^2 - (m+1)) = m^2(m+1) + (3(m+1)^2 - (m+1)) \\ &= (m+1)(m^2 + 3(m+1) - 1) = (m+1)(m+1)(m+2) = (m+1)^2((m+1)+1),\end{aligned}$$

så vi kan dra slutsatsen att likheten stämmer om $n = m + 1$. Därför enligt induktion gäller likheten för alla $n \in \mathbf{N}$.

4.

(a) Definiera begreppet *strängt växande* som gäller för en funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(b) Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formeln

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

för alla $x \in \mathbf{R}$. Visa att f är strängt växande. [Tips: Faktorisera polynomet.]

Solution:

(a) En funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kallas för *strängt växande* om $x < y$ medför att $f(x) < f(y)$ för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

(b) Vi kan skriva $f(x) = (x-2)^3$ och eftersom $x \mapsto x+2$ är strängt växande räcker det att visa $x \mapsto x^3$ är strängt växande. Sätt $g(x) = x^3$. Om $0 \leq x < y$ är $g(y) - g(x) = (y-x)(x^2 + xy + y^2) > 0$ och om $x < y \leq 0$ är $g(y) - g(x) = (y-x)(x^2 + xy + y^2) > 0$. Om $x < 0 < y$ enligt fallen övan är $g(x) < g(0) < g(x)$. Så g och därmed f är strängt växande.

5.

(a) Räkna summan
$$\sum_{k=1}^{8} 5(6)^k.$$

(b) Räkna summan
$$\sum_{k=1}^{42} \frac{7}{2^{k-1}}.$$

Här behöver du inte räkna ut potenser, det räcker att skriva om summan så att det har högst två termer som innehåller eventuella potenser.

Solution:

(a) Vi använder formen $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$ med $n = 8$, $r = 6$ och $a = 30$, så
$$\sum_{k=1}^{8} 5(6)^k = \sum_{k=1}^{8} 30(6)^{k-1} = 30\frac{1-(6)^8}{1-6} = 6^9 - 6.$$

(b) Vi använder formen $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$ med $n = 42$, $r = 1/2$ och $a = 7$, så
$$\sum_{k=1}^{42} \frac{7}{2^{k-1}} = 7\frac{1-(1/2)^{42}}{1-1/2} = 14(1-(1/2)^{42}).$$
