Inledande matematisk analys (TATA79)
Höstterminen 2015
Lösningen till uppgift 2(b)(ii) från provduggan

Vi måste visa två grejer:

1. $b_n \leq 3$ för alla $n \in \mathbf{N}$, och
2. för varje $\varepsilon > 0$ finns det $n \in \mathbf{N}$ så att $3 - \varepsilon < b_n$.

För att visa 1:

$$b_n = \frac{6n+2}{2n+1} = 3\left(\frac{2n+2/3}{2n+1}\right) \leq 3$$

för alla $n \in \mathbf{N}$ eftersom $2/3 \leq 1$.

För att vissa 2 betrakta $\varepsilon > 0$. Observera att hitta n så att $3 - \varepsilon < b_n$ är det samma som att hitta n så att $3 - b_n < \varepsilon$. Vi räknar att

$$3 - b_n = 3 - \frac{6n+2}{2n+1} = \frac{3(2n+1) - 6n + 2}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Så det räcker att välja n så att

$$\frac{1}{2n+1} < \varepsilon,$$

som är helt möjligt. Till exempel ta n lika med ett naturligt tal större än $1/\varepsilon$ och då är 2 bevisat.