Inledande matematisk analys (TATA79)
Höstterminen 2016
Föreläsnings- och lekionsplan

Om man hinner inte att lösa alla uppgifter kan man prioritera uppgifterna markerade med en asterisk ($*$).

- **Föreläsning 1** Logik, axiom och argument inom matematik, talbeteckningssystem för hetal, rationella tal, heltalspotenser.

◦ **Lektion 1 och Handledningstillfälle 1** Logik och argument inom matematik, talbeteckningssystem för hetal, rationella tal, m.m.

1. Visa de följande implikationer.
   - $*$ (a) $x \geq 5 \implies x^2 \geq 25$
   - $*$ (b) $x^2 \geq 20 \impliedby x \geq 5$
   - (c) $-2 < x < 2 \iff x^2 < 4$
   - $*$ (d) $x > 5 \implies x(x-2) > 15$
   - (e) $x > 4 \implies (x-1)(x-3) > 3$
2. $*$ Skriv kontrapositionen till varje påstående i uppgift 1 utom (1c).
3. Visa att de följande implicationer är felaktika.
   - $*$ (a) $x \geq 5 \impliedby x^2 \geq 25$
   - (b) $x^2 \geq 20 \implies x \geq 5$
   - $*$ (c) $x > 5 \impliedby x(x-2) > 15$
   - (d) $x > 4 \impliedby (x-1)(x-3) > 3$
4. Skriv negationen till de följande påståenden.
   - $*$ (a) Det finns ett heltal n så att $n^2 - 3n + 1 < 0$.
   - (b) Varje reella tal x är så att $x^2 \geq 0$.
   - $*$ (c) För alla $x, y \in \mathbf{R}$ är $x + y = y + x$.
   - $*$ (d) $x > 8 \implies x^2 - 14x + 48 > 0$.
   - (e) Om n är ett heltal är $4n^2 - 12n + 8 \geq 0$.
5. Vilka av de påståenden i uppgift 4 är rätt? Motivera i varje fall ditt svar.
6. Visa att om
   - (a) n_1 delat med 7 har rest 2, och
   - (b) n_2 delat med 7 har rest 2,

   då har $n_1 n_2$ delat med 7 rest 4.
7. $*$ Visa att om
   - (a) n_1 delat med 4 har rest 2, och
   - (b) n_2 delat med 4 har rest 3,

   då har $n_1 n_2$ delat med 4 rest 2.
8. (a) Skriv de decimala heltal 7, 17, 12 och 32 i det binära talsystemet (det vill säga i bas 2).
   - $*$ (b) Skriv de decimala heltal 7, 17, 12 och 32 i det ternära talsystemet (det vill säga i bas 3).
   - $*$ (c) Skriv de decimala heltal 615 och 3792 i det bablyoniska talsystemet (det vill säga i bas 60).
9. För att visa en siffra eller några siffror i en decimal utveckling upprepas i evighet skriva vi en punkt ovan varje siffran som upprepas. Till exempel $7/3 = 2.333\ldots$ skrivs som $2.\dot{3}$ och $25/99 = 0.252525\ldots$ skrivs som $0.\dot{2}\dot{5}$.
   - (a) Skriv de decimala utvecklingar $0.\dot{2}\dot{7}$, $6.\dot{1}\dot{5}$, $4.\dot{1}\dot{1}\dot{8}$ och $0.\dot{9}$ som bråk.
   - (b) Räkna de första fyra siffrorna i en decimal utveckling för $1/8$, $1/3$, $1/2$ och $4/7$.
10. Lös uppgifter 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 och 1.6 i *Problem för envar.* (Fråga lektionsledaren om du vet inte vad minsta gemensamma nämnaren betyder.)

Senast ändrad: 1 december 2016.

- **Föreläsning 2** Mängder, egenskaper hos reella tal, följder och induktionsbevis

◦ **Lektion 2** Mängder, egenskaper hos reella tal, följder

∗ 1. Rita de följande delmängderna av $\mathbf{R}$ på reella linjen.
   (a) $\{1, 2, 5\}$
   (b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x < 2\}$
   (c) $\{n \in \mathbf{Z} \mid n = 2k$ för något $k \in \mathbf{N}\}$
   (d) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k$ för något $k \in \mathbf{Z}\}$
   (e) $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \leq 1$ eller $x^2 - 5x + 6 = 0\}$

∗ 2. Vilka av de följande mängderna är lika med intervallet $[0, 4]$? Motivera ditt svar.
   (a) $\{x \in \mathbf{R} \mid 4x - 7 \geq 2$ och $x \leq 4\}$
   (b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 + 4 < 12 - 8x\}$
   (c) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2x + 1 \leq 1$ eller $8 \leq 6x - x^2\}$
   (d) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x \leq 0$ och $8 \leq 6x - x^2\}$
   (e) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x < 0,\ x^2 - 4x + 3 = 0$ eller $x^2 + 8 = 6x\}$

∗ 3. Bevisa att följden $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definierad genom uttrycket

$$a_n = \frac{n^n}{(2n)!}$$

   för varje $n \in \mathbf{N}$ är uppåt begränsad. [Tips: Försök jämföra $(2k)!$ med k^k.]

∗ 4. (a) Bevisa att $\inf A = 3$ och $\sup A = 7$ där $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 10x + 25 < 4\}$.
   (b) Tillhör 3 eller 7 till mängden A?
   (c) Bevisa att $\inf B = 2$ och $\sup B = 7$ där $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 4x^2 - 36x + 81 \leq 25\}$.
   (d) Tillhör 2 eller 7 till mängden B?
   (e) Bevisa att $\inf C = 1$ och $\sup C$ finns ej där $C = \{x \in \mathbf{R} \mid x > -1$ och $x^2 + 4x - 5 \geq 0\}$.

5. Lös uppgifter 1.51, 1.52, 1.53, 1.54(b), 1.55(b), 1.56 och 1.57 i *Problem för envar.*

6. Extra:
   (a) Betrakta två följder $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ som uppfyller

$$1 - \frac{1}{n} \leq a_n b_n \leq 1 \tag{1}$$

   för alla $n \in \mathbf{N}$. Visa att

$$\sup_n (a_n b_n) = 1.$$

   (b) Hitta två följder $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ som uppfyller (1) för alla $n \in \mathbf{N}$ men är så att

$$\left(\sup_n a_n\right)\left(\sup_n b_n\right) > 1.$$

   (c) Betrakta två följder $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ som uppfyller

$$1 - \frac{1}{\min\{n, m\}} \leq a_n b_m \leq 1$$

   för alla $n, m \in \mathbf{N}$. Visa att

$$\left(\sup_n a_n\right)\left(\sup_n b_n\right) = 1.$$

◦ **Handledningstillfälle 2**

◦ **Handledningstillfälle 3** Lämna in uppgifter 1a.

◦ **Lektion 3** Induktionsbevis

1. Ge en induktionsbevis av de följande likheter som gäller för alla $n \in \mathbf{N}$.

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2} = \frac{n^2}{2}$$

∗ (b)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{2n^3+6n^2+4n}{6}$$

2. Ge en induktionsbevis av de följande olikheter.

∗ (a) $4n \leq 2^n$ för alla heltal $n \geq 5$.

(b) $2n+1 \leq 2^n$ för alla heltal $n \geq 3$.

(c) $n^2 \leq 2^n$ för alla heltal $n \geq 4$.

∗ 3. Ge en induktionsbevis av formeln i avsnitt 2.4.1 för summan av en geometrisk följd $(ar^{i-1})_{i\in\mathbf{N}}$ med kvoten r:

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

där $a \in \mathbf{R}$ och $r \neq 1$.

∗ 4. Hitta vad är fel med de följande induktionsbevisen.

(a)

Sats. *$k^2 \leq k$ för alla $k \in \mathbf{N}$.*

Bevis. Vi kan lätt kolla att bas fallet stämmer, det vill säger om vi tar $k = 1$ så är $k^2 = 1^2 \leq 1 = k$.
Nu antar vi att satsen gäller för $k = n$ för något givna $n \in \mathbf{N}$ och betraktar fallet $k = n+1$. I fallet $k = n+1$ har vi att

$$(n+1)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satsen med } k=n+1}}{\leq} (n+1) \leq 3n+1 \iff n^2+2n+1 \leq 3n+1 \iff n^2 \leq n.$$

Men $n^2 \leq n$ stämmer enligt induktionsantagandet, så satsen är bevisad. □

(b)

Sats. *$2k = 0$ för alla $k \in \mathbf{N}_0$.*

Bevis. Vi först kollar att bas fallet stämmer: Vi tar $k = 0$ så är $2k = 2 \times 0 = 0$ och satsen gäller om $k = 0$.
Nu antar vi att satsen gäller för alla $k \leq n$ för något givna $n \in \mathbf{N}$ och betraktar fallet $k = n+1$. Vi skriver $n+1 = i+j$ där i och j är två icke-negativa tal mindre än eller lika med n. Då får vi säger att

$$2(n+1) = 2(i+j) = 2i+2j = 0+0 = 0$$

enligt induktionsantagandet, så satsen är bevisad. □

(c)

Sats. *$k+1 < k$ för alla $k \in \mathbf{N}$.*

Bevis. Som vanligt antar vi att satsen gäller för $k = n$ för något givna $n \in \mathbf{N}$ och betraktar fallet $k = n+1$: Enligt induktionsantagandet är

$$(n+1)+1 < (n)+1 = (n+1)$$

som är satsen i fallet $k = n+1$. Enligt induktion är satsen bevisad. □

∗ 5. Från avsnitt 2.4.2 vet vi att

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2}$$

Enligt motivationen som också ges i avsnitt 2.4.2 borde $\binom{n}{k}$ vara ett positivt heltal för alla $n, k \in \mathbf{N}_0$ med $k \leq n$. Vi kan räkna ut direkt att

$$\binom{n}{0} := \frac{n!}{0!n!} = 1 \quad \text{och} \quad \binom{n}{n} := \frac{n!}{n!0!} = 1 \tag{3}$$

men att alla de andra värden är heltal är svårt att kontrollera direkt från definitionen (2).

(a) Använder sats 2.29 (Pascals identitet) samt (3) för att ge en induktionsbevis av faktumet att

$$\binom{n}{k} \in \mathbf{N}$$

för alla $n, k \in \mathbf{N}_0$ med $k \leq n$.

(b) Rita en bild för att visa upp hur ditt bevis betäcker alla möjliga par av n och k. [Tips: Tänk på Pascals triangel.]

- **Föreläsning 3** Funktioner, polynom, grafer och monoticitet

◦ **Handledningstillfälle 4**

◦ **Lektion 4** Funktioner, polynom

∗ 1. Hitta alla möjliga par av reella tal (a, b) som uppfyller

$$|a + b| = |a| + |b|.$$

2. Lös uppgifter 1.23, 1.24, 1.25, 1.26 och 1.28 i *Problem för envar.*

∗ 3. Genom att använder satser som finns i avsnitt 2.5.2 av föreläsnings anteckningar bevis den följande satsen.

Sats. *Om* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *är ett polynom av grad* n *och det finns tal* $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ *så att* $p(x_j) = 0$ *för alla* $j = 0, 1, \ldots, n$ *så är* $a_k = 0$ *för alla* $k = 1, 2, \ldots, n$.

∗ 4. Hitta $a, b, c \in \mathbf{R}$ så att ekvationen

$$(2a - 5)x^2 + (5b + c)x + (c - a) = 0$$

gäller för alla $x \in \mathbf{R}$. Motivera ditt svar.

∗ 5. Använd systemet av ekvationer

$$\begin{cases} (2a-6) + (b+a) + (2c+a) & = 2 \\ (2a-6) + 2(b+a) + 4(2c+a) & = 2 \\ (2a-6) + 3(b+a) + 9(2c+a) & = 2 \end{cases}$$

för att sluta dig till en polymonekvation i en variable $x \in \mathbf{R}$ med koefficienter som beror på a, b och c. Motivera ditt svar.

◦ **Lektion 5** Koordinatsystem, monoticitet

∗ 1. Skissa graferna av följande funktioner $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(a) $f(x) = 2x - 2$.

(b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{om } x \leq 2, \\ 2 + 2x - x^2 & \text{om } x > 2. \end{cases}$

(c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 16$.

∗ 2. Visa att de följande funktioner är växande

(a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln $f(x) = 2x - 2$.

(b) $f\colon [0, \infty) \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln $f(x) = x^2$.

(c) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln $f(x) = x^3$.

[Kom ihåg att vi får inte (eller vet inte ens vad det betyder att) derivera funktioner!]

∗ 3. Bevisa att funktionen $g\colon [-4,\infty) \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln $g(x) = x^2+8x+17$ för $x \in [-4,\infty)$ är strängt växande men funktionen $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln $h(x) = x^2 + 8x + 17$ för alla $x \in \mathbf{R}$ är varken växande eller avtagande.

∗ 4. Lös uppgifter 2.38(b)–(j), 2.39(b)–(c) och 2.42 i *Problem för envar*. En funktion $f\colon D \to \mathbf{R}$ kallas för *uppåt begränsad* om det finns ett $C \in \mathbf{R}$ så att $f(x) \leq C$ för alla $x \in D$. En funktion $f\colon D \to \mathbf{R}$ kallas för *nedåt begränsad* om det finns ett $C \in \mathbf{R}$ så att $C \leq f(x)$ för alla $x \in D$. En funktion $f\colon D \to \mathbf{R}$ kallas för *begränsad* om den är både uppåt och nedåt begränsad.

◦ **Handledningstillfälle 5**

– **Dugga 1**

• **Föreläsning 4** Former, Pythagoras sats, inversefunktioner, rötter, rationella potenser

◦ **Lektion 6** Former, Pythagoras sats, irrationella tal

∗ 1. Skissa mängderna
   (a) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$,
   (b) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ och
   (c) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$,

   förgivna $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ och $r > 0$. Motivera dina skisser med hjälp av Pythagoras sats.

∗ 2. Skissa mängderna
   (a) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$,
   (b) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x+y| + |x-y| = 2\}$ och
   (c) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ och } x + y \leq 1\}$.

   Motivera dina skisser.

3. Hur många sätt finns det att rita fyra streck mellan fyra punkter? Rita några exemplar.

∗ 4. (a) Betrakta ett heltal m. Bevisa att om m^2 är delbart med 3 då är m delbart med 3.
   (b) Bevisa att $c^2 = 3$ medför att c är inte rationellt.

∗ 5. (a) Betrakta ett heltal m. Bevisa att om m^2 är delbart med 6 då är m delbart med 6.
   (b) Bevisa att $c^2 = 6$ medför att c är inte rationellt.

∗ 6. Hitta ett heltal m så att m^2 är jämnt delbart med 9 fast m är det inte.

◦ **Handledningstillfälle 6**

◦ **Lektion 7** Inversefunktioner, rötter, rationella potenser

∗ 1. Enligt (3.11), för vilka $a \in \mathbf{R}$ är $a^{2/3}$ definierat? För vilka $a \in \mathbf{R}$ får man betrakta $\sqrt[3]{a^2}$? Varför har vi begränsad värdena av a i definitionen (3.11)?

2. Lös problem ∗2.1, ∗2.2, ∗2.4, ∗2.5, 2.6 och 2.24 från *Problem för envar.*

3. Lös problem ∗1.32, 1.33, ∗1.35, 1.36, ∗1.38(a), (e) och (f), 1.39 från *Problem för envar.*

• **Föreläsning 5** Trigonometri, formler med trigonometriska funktioner och arcusfunktioner

◦ **Lektion 8** Trigonometri

1. Lös problem 2.43, ∗2.44, 2.45, ∗2.46 och ∗2.47 från *Problem för envar.*

∗ 2. (a) Betrakta en regelbunden polygon med n sidor ($n \geq 4$) vilkens samtliga hörn sitta på enhetscirkeln, det vill säga att enhetscirkeln är den omskrivna cirkeln till polygonen. Visa att enhetscirkelns area A uppfyller

$$\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leq A.$$

   (b) Betrakta en regelbunden polygonen med n sidor ($n \geq 4$) så att den enhetscirkel tangerar polygonens samtliga sidor. Visa att enhetscirkelns area A uppfyller

$$A \leq n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

∗ 3. Bevisa med hjälp av andra trigonometriska likheter vi har bevisat att

(a) $\cos^2\theta = (1+\cos(2\theta))/2$, och

(b) $\sin^2\theta = (1-\cos(2\theta))/2$.

∗ 4. Använd (3.20) och sats 3.10 för att bevisa

$$\cos^2\theta \geq 1-\theta^2$$

och

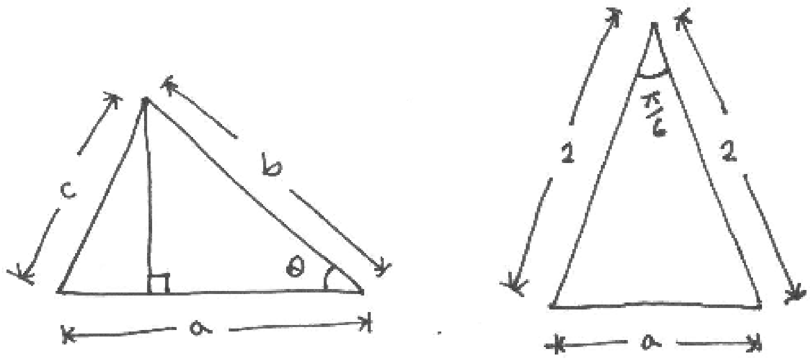
$$\cos\theta \geq 1-\theta$$

för $\theta \in [0, \pi/2]$.

(a) Använda sats 3.2 och figur 1a för att bevisa att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

för en triangle med sidlängdorna a, b och c och en vinkel θ mittemot sidan av längden c. Likheten kallas för *cosinussatsen*.



(a) En triangel delad i två.

(b) En triangel till.

Figur 1: Två trianglar.

(b) Använder cosinussatsen och figur 1b för att visa

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

Kom ihåg att $(4 \pm 2\sqrt{3}) = 3 \pm 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} \pm 1)^2$.

5. Extra: Använd sats 3.10 och (4) för att bevisa att det finns exakt ett tal A så att

$$n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq A \leq n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

för alla heltal $n \geq 4$. Räkna ut A. [Tips: Tänk på infimum och supremum.]

◦ **Lektion 9** Arcusfunktioner

∗ 1. Lös problem 2.71, 2.72, 2.73, 2.74 och 2.47 från *Problem för envar.*

2. Extra: Lös problem 2.76 från *Problem för envar.*

◦ **Handledningstillfälle 8** Lämna in uppgifter 1b.

• **Föreläsning 6** Exponentialfunktion, ränta på ränta, egenskaper hos exponentialfunktionen

◦ **Lektion 10** Exponentialfunktion

∗ 1. Anta att $\exp(x) = \sqrt{2}$ och $\exp(y) = \sqrt{8}$. Räkna ut (a) $\exp(x+y)$, (b) $\exp(2x)$ och (c) $\exp(2x+2y)$.

∗ 2. Förenkla följande uttryck (där $x, y \in \mathbf{R}$):

(a) $\frac{\exp(2x)\exp(-y)}{\exp(x-y)}$;

(b) $\left(\frac{\exp(-2x)\exp(y)}{\exp(-x)\exp(2y)}\right)^{-1}$.

∗ 3. Om $x \in \mathbf{R}$ uppfyller $\exp(2x+3) = \exp(2x) + \exp(3)$ räkna ut möjliga värder för $\exp(x)$.

∗ 4. Kom ihåg att $e := \exp(1)$. Använder definitionen (4.3) och sats 4.3 för att visa

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2}$$

för alla $n \in \mathbf{N}$ och i synnerhet $9/4 \leq e \leq 4$.

5. För vilket $x \in \mathbf{R}$ är uttrycket $\sqrt{1 - \exp(x)}$ definierat?

∘ **Handledningstillfälle 9**

∘ **Handledningstillfälle 10** Lämna in uppgifter 2a.

∘ **Lektion 11** Mer om exponentialfunktion

∗ 1. I sats 4.4, del 5 visade vi att exponentialfunktionen är växande. Använder del 2 av sats 4.4 och sats 4.6 för att visa exponentialfunktionen är strängt växande.

∗ 2. Förenkla följande uttryck (där $x, y \in \mathbf{R}$):

(a) $\frac{\exp(x+3)\exp(x+2)}{\exp(x^2+5x+5)}$;

(b) $\frac{\exp(x-2)\exp(x+4)}{\exp(x^2+2x-7)} + \frac{3\exp(x-6)\exp(x+5)}{\exp(x^2-x-29)}$.

3. Använd Bernoullis olikhet (sats 4.1) för att bevisa det särskilda fallet av sats 4.2:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

för alla $n \in \mathbf{N}$.

∗ 4. (a) Skissa på samma koordinataxlarna grafen av exponentialfunktionen och polynomet $x \mapsto 1 + x + x^2/4$.

(b) Bevisa att

$$\exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

för $x \geq -n$ och speciellt

$$\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{4}$$

för $x \geq -2$. Beakta att ditt bevis funkar då $x = -n$. Funkar beviset om $x < -n$? Om det funkar inte, varför inte?

• **Föreläsning 7** Naturliga logaritmfunktionen och irrationella potenser

∘ **Lektion 12** Naturliga logaritmfunktionen, irrationella potenser

1. ∗2.7, 2.8, ∗2.9, 2.11 och ∗2.14 från *Problem för envar.*

∗ 2. Visa att $\ln(a) \leq na^{1/n}$ för alla $a > 0$ och $n \in \mathbf{N}$. Olikheten säger att den naturliga logaritmfunktionen växer långsammare än en godtycklig positiv potens.

∗ 3. Förenkla följande uttryck:

(a) $\exp(\ln(4) - \ln(3)) + 2\exp(\ln(3))$;

(b) $\exp(\ln(\sqrt{x+1}) + \ln(\sqrt{x-1}))$ för $x > 1$; och

(c) $2\ln(\exp(\sqrt{x+1})\exp(\sqrt{x-1}))$ för $x \in \mathbf{R}$.

∗ 4. (a) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\sqrt{\ln\left(\frac{1-x}{3-x}\right)}$$

definierat?

(b) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\sqrt{\ln(1-x) - \ln(3-x)}$$

definierat?

(c) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)}$$

definierat?

(d) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\sqrt{\ln(x-1) - \ln(x-3)}$$

definierat?

(e) Vilka av uttrycken ovan är lika?

(f) 2.32, 2.36(b) och 2.37 från *Problem för envar.*

5. ∗2.28, ∗2.35 och 2.36(a) från *Problem för envar.*

- **Handledningstillfälle 11**
- **Handledningstillfälle 12** Lämna in uppgifter 2b.
- **Lektion 13** Repetition och frågor
- **Föreläsning 8** Komplexa tal och den komplexa exponentialfunktionen
- **Lektion 14** Komplexa tal

1. 1.66, 1.67, ∗1.68, ∗1.69, ∗1.70 (det vill säga bevisa del 3 av sats 4.9) från *Problem för envar.*
2. ∗1.71, 1.72, ∗1.73, 1.78 och ∗1.79 från *Problem för envar.*

∗ 3. Visa att $\overline{wz} = \overline{w}\,\overline{z}$ och $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$ för alla $w, z \in \mathbf{C}$. (Det vill säga bevisa delar 1 och 2 av sats 4.9.)

∗ 4. Visa att om P är ett polynom med reella koefficienter och $P(z) = 0$ för något $z \in \mathbf{C}$ då är $P(\overline{z}) = 0$.

- **Lektion 15** Komplexa exponentialfunktionen

∗ 1. Använd den komplexa exponentialfunktionen för att definiera sin och cos på komplexa tal. [Tips: Titta på sats 4.10.]

∗ 2. 2.65, 2.66, 2.67 och 2.70 från *Problem för envar.*

3. Hitta alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $z^n = 1$ för (a) $n = 2$, (b) $n = 6$, (c) $n = 7$, (d) $n = -3$ och (e) $n = 5$. Rita lösningar till (a), (b) och (c) i det komplexa planet.

∗ 4. Hitta alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $z^n = 9$ för (a) $n = 2$, (b) $n = 6$ och (c) $n = 7$.

– **Dugga 2/Tentamen**