Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) (a) Definiera med hjälp av en bild funktionen $\sin\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(b) Bevisa att $\sin\theta < \theta$ för $\theta \in (0, \pi/2)$. Du får använda en bild som stöd för ditt bevis.

(2) Hitta alla $x \in \mathbf{R}$ som löser ekvationen

$$3\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3}.$$

(3) (a) Kom ihåg att $\exp(x) \geq 1 + x$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Använd den tillsammans med andra räknareglar för att visa

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

för $x < 1$.

(b) Skissa grafen av exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to (0, \infty)$.

(4) (a) Låt y vara en godtyckligt reellt tal. Visa att ekvationen

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

har en unik lösning $x \in \mathbf{R}$ som ges av $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

(b) Skissa grafen av funktion $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definieras som

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$.

(5) (a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Låt $b > 1$. Visa att funktionen $x \mapsto b^x$ är bijektiv och ge en formel för den inversa funktionen.

(6) (a) Hitta alla $w \in \mathbf{C}$ så att $w^2 = 3 + 4i$.

(b) Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ så att $z^2 + (2 + 2i)z - 3 - 2i = 0$.

(7) (a) Definiera $e^{i\theta}$ för $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Bevisa Eulers identitet:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$