**Instruktioner:** Svara på alla uppgifter. Det finns fem uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. **Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget.** Lycka till!

(1) Kom ihåg axiomen vi har antagit i kursen hittills:

I **De algebraiska axiomen:**

(a) $a + b = b + a$ och $ab = ba$ för alla reella tal $a$ och $b$ (kommutativa lagarna);
(b) $(a + b) + c = a + (b + c)$ och $(ab)c = a(bc)$ (associativa lagarna);
(c) $a(b + c) = ab + ac$ för alla reella tal $a$, $b$ och $c$ (distributiva lagen);
(d) Det finns två olika tal 0 och 1 så att $a + 0 = a$ och $a \times 1 = a$ för alla reella tal $a$ (existens av neutrala element);
(e) Till varje $a \neq 0$ finns det inversa element $-a$ och $a^{-1}$ så att $a + (-a) = 0$ och $a \times a^{-1} = 1$ (existens av invers).

II **Ordningens axiom:**

(a) För godtyckliga $a$ och $b$ gäller en och endast en av möjligheterna $a < b$, $a = b$ och $a > b$ (trikotomi);
(b) $a < b$ och $b < c$ medför att $a < c$ (transitiva lagen);
(c) $a < b$ medför att $a + c < b + c$ för alla reella tal $c$;
(d) $a < b$ och $0 < c$ medför att $ac < bc$.

Betrakta ett reellt tal $a$. Använda axiomen för att bevisa att det finns högst ett tal $b \in \mathbf{R}$ så att $a + b = 0$.

(2) (a) Definiera vad det betyder att säga $\ell$ är en infimum till en mängd $A$.

(b) Betrakta följderna $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ som definieras enligt

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{och} \quad b_n = \frac{n-1}{n}$$

för alla $n \in \mathbf{N}$.

(i) Bevisa att $\inf_n a_n = 0$.
(ii) Bevisa att $\inf_n b_n = 0$.

(3) Bevisa att

$$\sum_{k=0}^{n} (2k + 1) = (n + 1)^2.$$

(4) (a) Definiera begreppet *växande* som gäller för en funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(b) Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formeln

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{om } x \neq 0, \\ 0 & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

(i) Skissa grafen av $f$.

(ii) Visa att $f$ är inte växande.

(5) (a) Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

för $a, r \in \mathbf{R}$ så att $r \neq 1$.

(b) Räkna summan

$$\sum_{k=1}^{27} 4(-1)^k.$$