Errata och ändringar till föreläsningsanteckningar för TATA79

1. Sidan 16, rad 18. Det bör stå: Rationella tal är

$$\mathbf{Q} = \{a/b \,|\, a, b \in \mathbf{Z} \text{ och } b \neq 0\}.$$

2. Sidan 25, rad 9. Det bör stå: Precis som vi argumenterade för fakultet är det $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$.

3. Sidan 26, ovanför sats 2.31. Det bör stå: En funktion som är ganska användbar kallas för *absolutbeloppet* funktionen $x \mapsto |x|$. Den har definitionsmängden $\mathbf{R}$ och definieras enligt formeln

$$|x| = \begin{cases} x & \cancel{\text{if}} \text{ om } x \geq 0; \\ -x & \cancel{\text{if}} \text{ om } x < 0. \end{cases}$$

4. Sidan 29, i beviset av sats 2.36. Det bör stå: Dessutom är r antingen trivialt eller uppfyller $\text{grad}(r) < 1$, så $r(x) = a$ för någon konstant $a \in \mathbf{R}$.

5. Sidan 29, kring ekvation (2.33). Det bör stå: Eftersom $p(x_{m+1}) = 0$ medför sats 2.36 att

$$p(x) = k(x)(x - x_{m+1}) \tag{2.33}$$

där k är ett polynom av grad m. Men eftersom $x_j \neq x_{m+1}$ för alla $j = 0, 1, \ldots, m$ vet vi att $k(x_j) = 0$ för alla $j = 0, 1, \ldots, m$.

6. Sidan 29, efter ekvation (2.33). Det bör stå: Enligt induktion har vi bevisat satsen för alla $n \in \mathbf{N}_0$.

7. Sidan 30, i början av avsnitt 2.5.3. Det bör stå: Om $D \subseteq \mathbf{R}$ definierar vi *grafen* av en funktion $f : D \to \mathbf{R}$ att vara mängden

$$\text{graf}(f) := \{(x, y) \,|\, x \in D \text{ och } y = f(x)\}.$$

8. Sidan 35, rad 4. Det bör stå: Observera att om man addera två rationella tal får man ett rationellt tal.

9. Sidan 36, beviset av sats 3.4. Det bör stå:

Bevis. Först noterar vi att M_- inte är tomt: till exempel $1 \in M_-$ ty $1^2 < 2$. Dessutom är M_- begränsad uppåt: Om $x \geq 2$ så är $x^2 \geq 2^2 \geq 2$ och därför måste $x < 2$ för alla $x \in M_-$. Enligt (IIIa) finns det en minsta övre begränsning till M_-, så c är väldefinierat och är så att $1 \leq c \leq 2$.

Enligt (2.16) för varje $0 < \varepsilon \leq 1$ finns det $x \in M_-$ så att $c - \varepsilon < x$. Eftersom $c \geq 1$ och $\varepsilon \leq 0$ är $c - \varepsilon \geq 0$ så $(c-\varepsilon)^2 < x^2$, och eftersom $x \in M_-$ är $x^2 < 2$.

$$\begin{aligned} (c-\varepsilon)^2 < x^2 < 2 \implies & (c-\varepsilon)^2 < 2 \\ \iff & c^2 - 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < 2 \\ \iff & c^2 - 2 < 2c\varepsilon - \varepsilon^2 = (2c - \varepsilon)\varepsilon. \end{aligned}$$

Eftersom $c \leq 2$ och $\varepsilon > 0$ så gäller

$$c^2 - 2 < (2c - \varepsilon)\varepsilon < (2 \times 2 - 0)\varepsilon < 5\varepsilon \tag{3.5}$$

för alla $\varepsilon > 0$.

Enligt (2.15) är talet c också en övre begränsning till M_- och därför om $\varepsilon > 0$ är $x \leq c < c + \varepsilon$ för alla $x \in M_-$, så

$$\begin{aligned} c + \varepsilon \in M_+ \implies & (c+\varepsilon)^2 \geq 2 \\ \iff & c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 \geq 2 \\ \iff & c^2 - 2 \geq -2c\varepsilon - \varepsilon^2 = -(2c + \varepsilon)\varepsilon \end{aligned}$$

Senast ändrad: 24 november 2016.

Vi har valt $\varepsilon \leq 1$ och vi vet att $c \leq 2$ så

$$c^2 - 2 \geq -(2c + \varepsilon)\varepsilon > -(2 \times 2 + 1)\varepsilon = -5\varepsilon \tag{3.6}$$

för alla $0 < \varepsilon \leq 1$. Uppskattningar (3.5) och ~~(3.5)~~ (3.6) tillsammans medför att

$$0 \leq |c^2 - 2| < 5\varepsilon$$

för alla $0 < \varepsilon \leq 1$. Nu får vi välja $\varepsilon = 1/(5n)$ för godtyckliga $n \in \mathbf{N}$ så

$$0 \leq |c^2 - 2| < 1/n$$

för godtyckliga $n \in \mathbf{N}$. Därför enligt (IIIb) i avsnitt 2.3.2 är $|c^2 - 2| = 0$. Därifrån ser vi att $c^2 = 2$. $\square$

10. Sidan 57, ekvationen för z. Det bör stå: Formeln för lösningarna är

$$z = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}\right) & \cancel{\text{if}}\ \text{om } v < 0; \\ \pm\left(\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}\right) & \cancel{\text{if}}\ \text{om } v \geq 0. \end{cases}$$