Inledande matematisk analys (TATA79)
Höstterminen 2015
Föreläsnings- och lekionsplan 3

De tre sista föreläsningar och motsvarande lektioner kommer att se ut så här. Innan man börjar att plugga på lektionsuppgifter eller inlämningsuppgifter är det en bra idé att först läsa genom motsvarande avsnitten i föreläsningsanteckningar.

- **Repitition** Infimum och supremum. Det var klart från första duggan att ganska många inte har förstått begreppen *infimum* (också kallad för *största undre begränsning*) och *supremum* (*minsta övre begränsning*). Men det är inget problem eftersom vi har gott om tid för att föstå allt innan dugga 2. Det är en viktig del av kursen som vi ska träffa ännu ett par gånger till så det är en bra idé att passa på och gå genom begreppen igen. Här går vi genom *supremum* och ger några exempel.
  - **Definitionen** I princip behöver man inte motivera en definition: Den är någonting vi kan ta för givet. Men det är givetvis avändbart att förstå motivationen bakom definitionen. Då är det enklare att komma ihåg definitionen och förstå hur ämnet hänger ihop.

    Ett tal $u \in \mathbf{R}$ kallas för en *supremum* till en (icketom) mängd $A \subseteq \mathbf{R}$ (och skrivs $u = \sup A$) om två villkor är uppfyllde. Den första säger att u är **en** övre begränsning till A:
    $$a \leq u \text{ för alla } a \in A. \tag{†}$$
    Den andra säger att varje tal mindre än u (här skrivet i formen $u - \varepsilon$ för positivt ε) inte är en övre begränsning, det vill säger u är **den minsta** övre begränsningen som finns:
    $$\text{för varje } \varepsilon > 0 \text{ finns det ett } a \in A \text{ så att } u - \varepsilon < a. \tag{‡}$$
  - **Exempel** Nu går vi genom ett par exempel. För att visa att ett tal u är en supremum till en mängd A måste man visa att både villkor (†) och (‡) gäller för u och A.
    1. Visa att $\sup A = 3/4$ då $A = \{(3n+2)/(4n+5) \mid n \in \mathbf{N}\}$.
       Först vill vi kontrollera att (†) stämmer. Det betyder att vi måste visa att
       $$\frac{3n+2}{4n+5} \leq \frac{3}{4} \tag{$\star$}$$
       för **alla** $n \in \mathbf{N}$. Genom att multiplicera med $4(4n+5)$ ser vi att den är ekvivalent med
       $$12n + 8 = 4(3n+2) \leq 3(4n+5) = 12n + 15$$
       och den stämmer för alla n eftersom vi kan stryka $12n$ ut och $8 \leq 15$ så ($\star$) stämmer för alla $n \in \mathbf{N}$.
       Sen vill vi kontrollera att (‡) stämmer. Det betyder att för **varje** $\varepsilon > 0$ vi måste hitta **något** $n \in \mathbf{N}$ så att
       $$\frac{3}{4} - \varepsilon < \frac{3n+2}{4n+5}. \tag{$\star\star$}$$
       Här beror valet av n föstås på ε. Genom att multiplicera med $4(4n+5)$ ser vi att den är ekvivalent med
       $$12n + 15 - 4\varepsilon(4n+5) = 3(4n+5) - 4\varepsilon(4n+5) < 4(3n+2) = 12n + 8$$
       och i sin tur är ekvivalent med
       $$7 < 4\varepsilon(4n+5). \tag{$\spadesuit$}$$
       För varje givet $\varepsilon > 0$ är det möjligt att välja ett $n \in \mathbf{N}$ så att ($\spadesuit$) gäller — det räcker att välja n tillräckligt stort (till exempel, ett naturligt tal större än $7/(16\varepsilon)$ räcker). Därför har vi visat att för varje $\varepsilon > 0$ finns det något $n \in \mathbf{N}$ så att ($\star\star$) stämmer.
       Eftersom vi har visat att (†) och (‡) stämmer med $u = 3/4$ och $A = \{(3n+2)/(4n+5) \mid n \in \mathbf{N}\}$ har vi bevisat att $\sup A = 3/4$.

Senast ändrad: 1 december 2015.

2. Visa att $\sup A = 10$ då $A = \{7 - 6n - 3n^2 \mid n \in \mathbf{Z}\}$.
   Först vill vi kontrollera att (†) stämmer. Det betyder att vi måste visa att
   $$7 - 6n - 3n^2 \leq 10 \tag{$\diamondsuit$}$$
   för **alla** $n \in \mathbf{Z}$. Men
   $$7 - 6n - 3n^2 = -3(n+1)^2 + 10 \leq 10$$
   så ($\diamondsuit$) stämmer för alla $n \in \mathbf{Z}$
   Sen vill vi kontrollera att (‡) stämmer. Det betyder att för **varje** $\varepsilon > 0$ vi måste hitta **något** $n \in \mathbf{Z}$ så att
   $$10 - \varepsilon < 7 - 6n - 3n^2. \tag{$\heartsuit$}$$
   Genom att skriva om $7 - 6n - 3n^2 = -3(n+1)^2 + 10$ ser vi att den är ekvivalent med
   $$10 - \varepsilon < -3(n+1)^2 + 10$$
   och i sin tur är ekvivalent med
   $$3(n+1)^2 < \varepsilon. \tag{$\spadesuit$}$$
   För varje givet $\varepsilon > 0$ är det möjligt att välja ett $n \in \mathbf{Z}$ så att ($\spadesuit$) gäller — det räcker att välja n så att $3(n+1)^2 = 0$, det vill säger $n = -1$ (så i det här fallet är valet av n det samma för varje $\varepsilon > 0$). Därför har vi visat att för varje $\varepsilon > 0$ finns det något $n \in \mathbf{Z}$ så att ($\heartsuit$) stämmer. Så vi har bevisat att $\sup A = 10$.

– Observera att $\sup A$ måste inte tillhör till mängden A. I exempel 2 var 10 ett element i $\{7 - 6n - 3n^2 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ men i exempel 1 var $4/3$ inte ett element i $\{(3n+2)/(4n+5) \mid n \in \mathbf{N}\}$.

- **Föreläsning 6** 4.1 Exponentialfunktionen

  – **Lektion 10** Exponentialfunktionen

  1. Läs genom avsnitt 4.1.
  2. Anta att $\exp(x) = \sqrt{2}$ och $\exp(y) = \sqrt{8}$. Räkna ut (a) $\exp(x+y)$, (b) $\exp(2x)$ och (c) $\exp(2x+2y)$.
  3. Förenkla följande uttryck (där $x, y \in \mathbf{R}$):
     (a) $\frac{\exp(2x)\exp(-y)}{\exp(x-y)}$;
     (b) $\left(\frac{\exp(-2x)\exp(y)}{\exp(-x)\exp(2y)}\right)^{-1}$.
  4. Om $x \in \mathbf{R}$ uppfyller $\exp(2x+3) = \exp(2x) + \exp(3)$ räkna ut möjliga värder för $\exp(x)$.
  5. Kom ihåg att $e := \exp(1)$. Använder definitionen (4.3) och sats 4.3 för att visa
     $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2}$$
     för alla $n \in \mathbf{N}$ och i synnerhet $9/4 \leq e \leq 4$.
  6. För vilket $x \in \mathbf{R}$ är uttrycket $\sqrt{1 - \exp(x)}$ definierat?

  – **Handledningstillfälle 9** Rättade uppgifter 2a ges tillbaka

  – **Lektion 11 (uppdaterad)** Mer om exponentialfunktionen

  1. I sats 4.4, del 5 visade vi att exponentialfunktionen är växande. Använder del 2 av sats 4.4 och sats 4.6 för att visa exponentialfunktionen är strängt växande.
  2. Beviset av del 3 av sats 4.4 var inte komplett. Vi visade att
     $$1 - \frac{x^2}{n} \leq \exp_n(x)\exp_n(-x) \leq 1 \tag{$\oplus$}$$
     för alla $n > |x|$.
     (a) Visa att beviset kan förbättras genom att visa
     $$1 - \frac{x^2}{\min\{n, m\}} \leq \exp_n(x)\exp_m(-x) \leq 1. \tag{$\odot$}$$
     för alla n och m större än $|x|$. Här är $\min\{n, m\}$ det mindre av n och m.

(b) Betrakta två följder $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ som uppfyller

$$1 - \frac{1}{n} \leq a_n b_n \leq 1 \qquad (\otimes)$$

för alla $n \in \mathbf{N}$. Visa att

$$\sup_n (a_n b_n) = 1.$$

(c) Hitta två följder $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ som uppfyller $(\otimes)$ för alla $n \in \mathbf{N}$ men är så att

$$\left(\sup_n a_n\right)\left(\sup_n b_n\right) > 1.$$

(d) Betrakta två följder $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ som uppfyller

$$1 - \frac{1}{\min\{n, m\}} \leq a_n b_m \leq 1$$

för alla $n, m \in \mathbf{N}$. Visa att

$$\left(\sup_n a_n\right)\left(\sup_n b_n\right) = 1.$$

Här (2c) visar att $(\oplus)$ räcker inte för att bevisa del 3 av sats 4.4, men (2d) visar att bevisat kan fixas genom att förbättra $(\oplus)$ till $(\odot)$.

3. Förenkla följande uttryck (där $x, y \in \mathbf{R}$):
   (a) $\frac{\exp(x+3)\exp(x+2)}{\exp(x^2+5x+5)}$;
   (b) $\frac{\exp(x-2)\exp(x+4)}{\exp(x^2+2x-7)} + \frac{3\exp(x-6)\exp(x+5)}{\exp(x^2-x-29)}$.

- **Föreläsning 7** 4.2.1 Den naturliga logaritmfunktionen, 4.2.2 Irrationella potenser, 4.3 Komplexa tal

  – **Lektion 12 (uppdaterad)** Den naturliga logaritmfunktionen och irrationella potenser

1. Läs genom avsnitt 4.2.
2. 2.7, 2.8, 2.9, 2.11 och 2.14 från *Problem för envar.*
3. Förenkla följande uttryck:
   (a) $\exp(\ln(4) - \ln(3)) + 2\exp(\ln(3))$;
   (b) $\exp(\ln(\sqrt{x+1}) + \ln(\sqrt{x-1}))$ för $x > 1$; och
   (c) $2\ln(\exp(\sqrt{x+1})\exp(\sqrt{x-1}))$ för $x \in \mathbf{R}$.
4. (a) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\sqrt{\ln\left(\frac{1-x}{3-x}\right)}$$

   definierat?

   (b) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\sqrt{\ln(1-x) - \ln(3-x)}$$

   definierat?

   (c) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)}$$

   definierat?

   (d) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\sqrt{\ln(x-1) - \ln(x-3)}$$

   definierat?

   (e) Vilka av uttrycken ovan är lika?
   (f) 2.32, 2.36(b) och 2.37 från *Problem för envar.*
5. 2.28, 2.35 och 2.36(a) från *Problem för envar.*

  – **Lektion 13** Komplexa tal

1. Läs genom avsnitt 4.3 fram till och med avsnitt 4.3.3.

2. 1.66, 1.67, 1.68, 1.69, 1.70 (det vill säga bevisa del 3 av sats 4.9) från *Problem för envar.*
3. 1.71, 1.72, 1.73, 1.78 och 1.79 från *Problem för envar.*
4. Visa att $\overline{wz} = \overline{w}\,\overline{z}$ och $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$ för alla $w, z \in \mathbf{C}$. (Det vill säga bevisa delar 1 och 2 av sats 4.9.)
5. Visa att om P är ett polynom med reella koefficienter och $P(z) = 0$ för något $z \in \mathbf{C}$ då är $P(\overline{z}) = 0$.

- **Handledningstillfälle 10** Lämna in uppgifter 2b senast den 9:e december

- **Föreläsning 8** 4.3.4 Komplexa exponentialfunktionen, Sammanfattning av kursen
  - **Lektion 14** Komplexa exponentialfunktionen
    1. Läs genom avsnitt 4.3.4.
    2. 2.65, 2.66, 2.67 och 2.70 från *Problem för envar.*
    3. Hitta alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $z^n = 1$ för (a) $n = 2$, (b) $n = 6$, (c) $n = 7$, (d) $n = -3$ och (e) $n = 5$. Rita lösningar till (a), (b) och (c) i det komplexa planet.
    4. Hitta alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $z^n = 9$ för (a) $n = 2$, (b) $n = 6$ och (c) $n = 7$.
  - **Handledningstillfälle 11** Rättade uppgifter 2b ges tillbaka
  - **Lektion 15** Repetition och frågor
    1. Binomial satsen: Ni som har inte läst Diskret matematik kan göra de följande uppgifter:
       (a) Läs genom avsnitt 2.4.2.
       (b) 1.61, 1.62, 1.64 och 1.65 från *Problem för envar.*