Instruktioner: Lämna in dina lösningar till din handledare senast den 27:e november 2015. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade och ordentligt skrivna.

(1) Hitta alla möjliga par av reella tal (a, b) som uppfyller

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

(2) Vi definierar en funktion $f\colon \mathbf{R} \setminus \{3\} \to \mathbf{R}$ enligt formlen

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

för alla $x \neq 3$.

(a) Skissa grafen av f och därifrån gissa värdemängden V_f av f

(b) Hitta en formel för $f^{-1}\colon V_f \to \mathbf{R} \setminus \{3\}$ och kontrollera att både

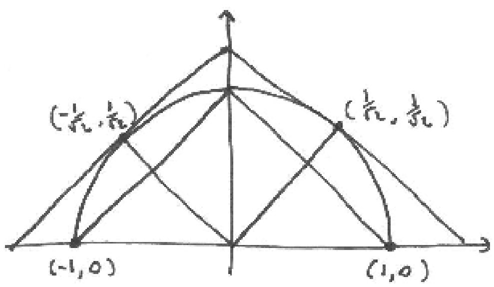
(i) $(f \circ f^{-1})(y) = y$ för alla $y \in V_f$, och

(ii) $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ för alla $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$.

(3) (a) Hitta två irrationella tal vilkas summa är rationellt.

(b) Hitta två irrationella tal vilkas produkt är rationellt.

(4) Kom ihåg definitionen av π från avsnitt 3.1.1. Använder figur 1 för att hitta en övre och undre begränsing till π.



Figur 1: En halvcirkel och några linjer.

(5) (a) Använda (3.16) och sats 3.7 för att bevisa

$$\cos^2\theta \geq 1-\theta^2$$

och

$$\cos\theta \geq 1-\theta$$

för $\theta \in [0,\pi/2]$.

(b) Använda sats 3.7 och (5a) för att bevisa att det finns exakt ett tal A så att

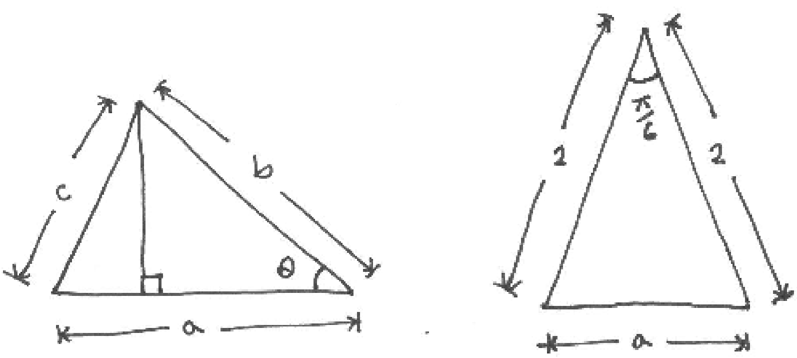
$$n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq A \leq n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

för alla heltal $n \geq 4$. Räkna ut A. [Tips: Tänk på infimum och supremum.]

(6) (a) Använda sats 3.1 och figur 2(a) för att bevisa att

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

för en triangle med sidlängdorna a, b och c och en vinkel θ mittemot sidan av längden c. Likheten kallas för *cosinussatsen*.



(a) En triangel delad i två. (b) En triangel till.

Figur 2: Två trianglar.

(b) Använder cosinussatsen och figur 2(b) för att visa

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

Kom ihåg att $(4\pm 2\sqrt{3}) = 3\pm 2\sqrt{3}+1 = (\sqrt{3}\pm 1)^2$.