Instruktioner: Lämna in dina lösningar till din handledare senast den 13:e november 2015. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade och ordentligt skrivna.

(1) Använda induktion för att bevisa

(a)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
för alla $n \in \mathbf{N}$, och

(b)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
för alla $n \in \mathbf{N}$.

(2) Använda induktion för att bevisa summan av en geometrisk följd är
$$S_n := \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
för alla $n \in \mathbf{N}$.

(3) Bevisa att

(a) $j \leq 10^j$ för alla $j \in \mathbf{N}$, och

(b) $n^2 \leq 2^n$ för alla $n \in \mathbf{N}$ utan $n = 3$.

(4) Bevisa att
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$
för positiva hela tal n och k så att $k \leq n$. (Uppgiften är egentligen att bevisa sats 2.23.)

(5) Skissera graferna till följande funktionerna.

(a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln $f(x) = |x+2|$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

(b) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln $f(x) = x^3$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

(c) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{för } x < 0; \\ x + 1 & \text{för } 0 \leq x < 2; \\ (x-2)^2 & \text{för } x \geq 2. \end{cases}$$

(d) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln $f(x) = |x - 3| - 4$ för alla $x \in \mathbf{R}$

(e) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{för } x < 0; \\ x^3 & \text{för } x \geq 0. \end{cases}$$

(6) Bevisa att följande funktionerna är växande.

(a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln $f(x) = x^3$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

(b) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln $f(x) = (x-2)^3$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

(c) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{för } x \leq 0; \\ 2x + 1 & \text{för } x > 0. \end{cases}$$

(7) Bevisa att

(a) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

(b)

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{j=1}^{n} x^{n-j} y^{j-1}$$

för alla $x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ och $n \in \mathbf{N}$. Vilket problem dyker upp i formeln när antingen x eller y är lika med 0? Hur kan man kringgå detta problem?