Instruktioner: Lämna in dina lösningar till din handledare senast den 6:e november 2015. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade och ordentligt skrivna.

(1) Skriva om följande decimalutvecklingar x som kvot.

(a) $x = 0.777\dots$ (det vill säger $n = 0$ och $a_k = 7$ för alla $k \in \mathbf{N}$);

(b) $x = 0.555\dots$ (det vill säger $n = 0$ och $a_k = 5$ för alla $k \in \mathbf{N}$);

(c) $x = 0.999\dots$ (det vill säger $n = 0$ och $a_k = 9$ för alla $k \in \mathbf{N}$);

(d) $x = 2.125000\dots$ (det vill säger $n = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ och $a_k = 0$ för alla $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 4$);

(e) $x = 0.421842184218\dots$ (det vill säger $n = 0$, $a_{4k-3} = 4$, $a_{4k-2} = 2$, $a_{4k-1} = 1$ och $a_{4k} = 8$ för alla $k \in \mathbf{N}$);

(f) $x = 45.626777\dots$ (det vill säger $n = 45$, $a_1 = 6$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ och $a_k = 7$ för alla $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 4$); och

(g) $x = 0.747252525\dots$ (det vill säger $n = 0$, $a_1 = 7$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$ och $a_{2k} = 2$ och $a_{2k+1} = 5$ för alla $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$).

(2) Betrakta två rationella tal r och s.

(a) Bevisa att $r + s$ är ett rationellt tal.

(b) Bevisa att rs är ett rationellt tal.

(c) För vilket s är r/s inte ett rationellt tal? Bevisa att r/s är rationellt för alla andra rationella s.

(3) Använda I, II samt de följande exemplen i avsnitt 2.2.1 för att bevisa de följande påståenden (när a, b, c och d är reella tal).

(a) $ab = 0$ medför att antingen $a = 0$ eller $b = 0$.

(b) $0 < a < b$ och $0 < c < d$ medför att $0 < ac < bd$.

(c) $ba = ca$ medför att $b = c$ om $a \neq 0$.

(4) Bevisa att

(a) $a^n a^m = a^{n+m}$ och

(b) $(a^n)^m = a^{nm}$

för alla reella tal a och naturliga tal n och m.

(5) Betrakta intervallen $A = [2, 5)$, $B = (4, 7)$ och $C = (6, 10]$. Beräkna

(a) $A \cap B$,
(b) $A \cup B$,
(c) $A \cap (B \cup C)$,
(d) $(A \cap B) \cup C$,
(e) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$,
(f) $(A \cup B) \cap C$, och
(g) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

(6) Ge den minsta övre begränsningen och den största undre begränsningen av följande mängder om dem finns. Du behöver inte ge bevis.

(a) $[0, \infty)$
(b) $[0, 1)$
(c) $\{1/n \mid n \in \mathbf{N}\}$
(d) $\{y \mid y = x^2 + 8x,\ x \in \mathbf{R}\}$
(e) $\{y \mid y = x^3 + 8x,\ x \in \mathbf{R}\}$
(f) $\{x \mid (x - 1)/(x + 1) \geq 0\}$
(g) $\{x \mid (x - 1)/(x + 1) \leq 0\}$

(7) Betrakta två följder $(a_n)_n$ och $(b_n)_n$ så att $\inf_{n \in \mathbf{N}} a_n = \alpha$ existerar och

$$\alpha \leq b_n \leq a_n$$

för alla $n \in \mathbf{N}$. Bevisa då att $\inf_{n \in \mathbf{N}} b_n$ existerar och den är lika med α.