Errata och ändringar till föreläsningsanteckningar för TATA79

1. Sidan 4, exempel 2.2. Det bör stå: Alltså är $1000x = 125 + x$ som i sin tur säger att $999x = 125$. Om vi delar båda sidor med 999 kommer vi fram till att
$$x = \frac{125}{999}.$$

2. Sidan 5, (Ib) bör säga: $(a + b) + c = a + (b + c)$ och $(ab)c = a(bc)$ (associativa lagarna).

3. Sidan 6, exempel 2.4. Det är mer tydligt att skriva: Sen medför (Ib), (Id) och (Ie) att $0 = a0 + (-(a0)) = (a0 + a0) + (-(a0)) = a0 + (a0 + (-(a0))) = a0$.

4. Sidan 7, fall 3 i beviset är lite fell. Det bör stå:

   Fall 3: $n < 0$. Bevisar vi först 3 om $n = -1$. Då har vi att $a^n = a^{-1}$, $b^n = b^{-1}$ och $(ab)^n = (ab)^{-1}$, så vi måste bevisa att inversen till ab är $a^{-1}b^{-1}$. Men
$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = a(ba^{-1})b^{-1} = a(a^{-1}b)b^{-1} = (aa^{-1})(bb^{-1}) = 1 \times 1 = 1$$
   enligt (Ia), (Ib) och (Ie) i avsnitt 2.2.1. Det säger att $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

5. Sidan 10, ett ganska förvirrande tryckfel:

   Definition 2.13 Låt $A \subset \mathbf{R}$ vara en icketom mängd. Om det finns ett tal $u \in \mathbf{R}$ så att
$$a \leq u \quad \text{för alla } a \in A.$$
   och
$$\text{till varje } \varepsilon > 0 \text{ finns det ett } a \in A \text{ så att } u - \varepsilon < a$$
   kallas u för en *minsta övre begränsning* (eller *supremum*) till A. Om u finns skriver man $u = \sup A$. Om det finns ett tal $\ell \in \mathbf{R}$ så att
$$\ell \leq a \quad \text{för alla } a \in A.$$
   och
$$\text{till varje } \varepsilon > 0 \text{ finns det ett } a \in A \text{ så att } a < \ell + \varepsilon$$
   kallas ℓ för en *störst undre begränsning* (eller *infimum*) till A. Om ℓ finns skriver man $\ell = \inf A$.

6. Sidan 26, bor vara:

   Nu får vi även utöka definitionen av potens från heltal till rationella tal genom definitionen
$$a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m} \tag{3.7}$$
   för alla $a > 0$, $m \in \mathbf{Z}$ och $n \in \mathbf{N}$.

7. Avsnitt 3.2.3. Några tryckfel:

   Existens. Monotinicitet medför också att om två tal x och y är så att $f(x) \leq 2$ och $f(y) \leq 2$ vet vi att c inte kan ligga utan för intervallet $[x, y]$ (eftersom om till exempel $z < x$ så är $f(z) < f(x) < 2$). Därför provar vi olika värden i f för att begränsa var c kan ligga. Vi försöker att göra det systematiskt.

   Vi börjar genom att testa heltal: Observera att $f(1) = +1 < 2$ och $f(2) = 4 > 2$, så om c alls finns måste det ligga mellan $x_1 := 1$ och $y_1 := 2$.

   Sen vill vi vidare begränsar intervallet av möjliga värden för c så vi testar värdena mellan 1 och 2 genom att dela det upp i tiondelar. Vi testar $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0$ i funktionen f. I synnerhet får vi att $f(1.4) = +1.96 < 2$ och $f(1.5) = 2.25 > 2$ som medför att om c alls finns måste det ligga mellan $x_2 := 1.4$ och $y_2 := 1.5$.

Senast ändrad: 5 december 2015.

8. Avsnitt 3.3.3, en tecken fel:

   För att nu lösa (3.10) observera att

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

   så (3.10) är ekvivalent med

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

   Enligt argumentet ovan är (3.11) ekvivalent med

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

   om $b^2 - 4ac \geq 0$. Här betyder $\pm$ att vi egentligen har två möjliga ekvationer för x, antingen den med plustecken eller den med minustecken (fast båda ekvationerna är de samma om $b^2 - 4ac = 0$). Alltså får vi att (3.10) har just två lösningar

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

   om $b^2 - 4ac > 0$, precis en lösning

$$x = -\frac{b}{2a}$$

   om $b^2 - 4ac = 0$, och igen lösning alls om $b^2 - 4ac < 0$.

9. Sidan 30, skrev jag lite fel med injektivitet av tangens. Jag har ändrat det till:

   Det är klart från geometrin (till exempel, figur 10) att om vi begränsar definitionsmängden av sinus till $[-\pi/2, \pi/2]$ är den injektiv. Då har sinus värdemängden $[-1, 1]$. Samtidigt är det klart att cosinus är injektiv om vi begränsar definitionsmängden till $[0, \pi]$ och har värdemängden $[-1, 1]$, och att tangens (se figur 12) är injektiv om vi begränsar definitionsmängden till $(-\pi/2, \pi/2)$ och har värdemängden $\mathbf{R}$. Alltså definierar vi

$$\begin{aligned} \arcsin\colon [-1,1] &\to [-\pi/2, \pi/2], \\ \arccos\colon [-1,1] &\to [0, \pi], \quad \text{respektive} \\ \arctan\colon \mathbf{R} &\to (-\pi/2, \pi/2) \end{aligned}$$

   som inversa fuktioner till $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$, $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$, respektive $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$.

10. Sats 4.4, del 3. Beviset visa bara att $\sup_n(\exp_n(x)\exp_n(-x)) = 1$ och lite extra arbete behövs för att visa $\sup_n(\exp_n(x)\exp_n(-x)) = \exp(x)\exp(-x)$. Se lektion 11 av uppdaterad plan 3.

11. Avsnitt 4.2.1. Ersätt ”Eftersom exponentialfunktionen är växande medför det att den är injektiv, så vi kan dra slutsatsen att funktionen är bijektiv” med ”Utöver del 5 av sats 4.4 är exponentialfunktionen faktiskt strängt växande. (Varför? Tänk på del 2 av sats 4.4 och sats 4.6.) Det medför att exponentialfunktionen är injektiv, så vi kan dra slutsatsen att funktionen är bijektiv.”

12. Avsnitt 4.2.1, bevisat av sats 4.7, del 4: Om $a \geq e$ kan man kontrollera direkt att olikheten stämmer...

13. Avsnitt 4.2.2, borde vara: Medan vänsterledet av (4.13) är odefinierat om $r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, är högerledet definierat för alla $r \in \mathbf{R}$!

14. Avsnitt 4.3.3. Alla utan två kopior jag delade ut har den rätta formeln för lösningar till (4.22):

$$z = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}\right) & \text{if } v < 0; \\ \pm\left(\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}\right) & \text{if } v \geq 0. \end{cases}$$