Inledande matematisk analys

1.

(a) Visa att om n^3 är jämnt där n är ett heltal då är n jämnt.

(b) Visa att $2^{\frac{1}{3}}$ är irrationellt.

Solution:

(a) Det räcker att visa kontrapositionen: "Om n är ett udda heltal då är n^3 udda."

Om n är ett udda heltal kan det skrivas som $n = 2k + 1$ för något heltal k. Då är

$$n^3 = (2n+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1,$$

så n^3 är udda.

(b) Vi ger ett motsägelsebevis. Anta att $2^{\frac{1}{3}}$ är rationellt. Då kan vi skriva $2^{\frac{1}{3}} = n/m$ där n och m är hela tal som har inga gemensamma faktorer. Det medför att

$$2 = \left(\frac{n}{m}\right)^3 \implies m^3 2 = n^3$$

så n^3 är jämnt. Enligt (a) är n därför jämnt så kan skrivas som $n = 2k$ för något heltal k. Det medför att

$$m^3 2 = (2k)^3 \implies m^3 2 = 8k^3 \implies m^3 = 2(2k^3)$$

så m^3 är också jämnt. Enligt (a) medför det att m är jämnt och därmed har n och m en gemensam faktor (mer precis sagt 2 är en gemensam faktor av n och m). Det är ett motsägelse till antagande att n och m hade inga gemensamma faktorer och därfär måste $2^{\frac{1}{3}}$ måste vara irrationellt.

2.

Med hjälp av dubbelvinkel formler och exakta värden för $\cos(\pi/4)$ och $\sin(\pi/4)$ räkna ut exakta värden av $\cos(\pi/8)$ och $\sin(\pi/8)$.

Solution:

Vi har att

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$$

så

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$\implies \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Eftersom $\sin\theta > 0$ för $\theta \in (0, \pi)$ är

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Vi har också att

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

så

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 \\
\implies \frac{1}{\sqrt{2}} &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 \\
\implies \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}
\end{aligned}$$

ty $\cos\theta > 0$ för $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

3.

Bevisa Bernoullis olikhet: För $x \geq -1$ och $n \in \mathbf{Z}_+$ är

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Påpecka steget i beviset där du använder dig av antagandet $x \geq -1$.

Solution:

Vi ger ett induktionsbevis. I fallet $n = 1$ är

$$(1 + x)^n = (1 + x)^1 = 1 + x \leq 1 + 1 \times x = 1 + nx$$

så likheten stämmer i fallet $n = 1$. Nu antar vi att

$$(1 + x)^m \geq 1 + mx.$$

för något positivt heltal m och räkna

$$\begin{aligned}
(1 + x)^{m+1} &= (1 + x)^m (1 + x) \underset{\overset{\uparrow}{(*)}}{\geq} (1 + mx)(1 + x) \\
&= 1 + mx + x + mx^2 = 1 + (m + 1)x + mx^2 \geq 1 + (m + 1)x
\end{aligned}$$

I $(*)$ använder vi både induktionsantagandet och antagandet $x \geq -1$.

4.

Kom ihåg att $\exp(x) = \sup_{n \in \mathbf{Z}_+} \exp_n(x)$ där

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n < |x|; \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n \geq |x|. \end{cases}$$

Använd Bernoullis olikhet för att visa

$$\exp(x) \geq 1 + x$$

och använd den tillsammans med räcknereglar för exponentialfunktionen för att visa

$$\exp(x + h) > \exp(x)$$

för $x \in \mathbf{R}$ och $h > 0$.

Solution:

Eftersom $\exp(x)$ är en övre begränsning av $(\exp_n(x))_{n\in\mathbf{Z}_+}$ vet vi att

$$\exp(x) \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

för $n \geq |x|$. Vi tillämpar Bernoullis olikhet med x/n istället för x. Eftersom $n \geq |x|$ är $x/n \geq -1$ så

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+n\frac{x}{n} = 1+x.$$

Vi har därför bevisat att

$$\exp(x) \geq 1+x.$$

Vi kan räkna att

$$\exp(x+h) = \exp(x)\exp(h) \geq \exp(x)(1+h) > \exp(x)$$

för $h > 0$ eftersom $\exp(x) > 0$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

5.

Identifiera medelpunkten och radien av cirkeln som ges av lösningarna $z \in \mathbf{C}$ till ekvationen

$$|z-3| = \sqrt{2}|z|.$$

Solution:

Vi räkna för $z = x+iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$ att

$$\begin{aligned} |z-3| = \sqrt{2}|z| &\iff |z-3|^2 = 2|z|^2 \iff (x-3)^2 + y^2 = 2(x^2+y^2) \\ &\iff x^2+6x-9+y^2 = 0 \iff (x+3)^2 + y^2 - 18 = 0 \\ &\iff (x+3)^2 + y^2 = (3\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

som vi känner igen som ekvationen för en cirkel med radien $3\sqrt{2}$ och medelpunkt (-3,0) (eller $-3+0i$ skriven som en punkt i komplexa planen).

---

6. Betrakta en funktion $f\colon (3,\infty) \to (0,\infty)$ definierad enligt uttrycket

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{x-3}}$$

för alla $x \in (3,\infty)$. Utred med bevis om f är inverterbar eller inte och i fallet den är inverterbar ge inversen.

Solution:

För $y > 0$ räknar vi att

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{2}{x-3}} \implies y^2 = \frac{2}{x-3} \implies x-3 = \frac{2}{y^2} \implies x = 3+\frac{2}{y^2}.$$

För alla $y > 0$ är $2/y^2 > 0$ och därför är $3+\frac{2}{y^2} > 3$, så för varje $y \in (0,\infty)$ finns det högst ett $x \in (3,\infty)$ som löser ekvationen $y = f(x)$. Därför är f injektiv.

För $y > 0$ kan vi också räkna att

$$x = 3 + \frac{2}{y^2} \implies x - 3 = \frac{2}{y^2} \implies y^2 = \frac{2}{x-3} \underset{y>0}{\overset{\uparrow}{\implies}} y = \sqrt{\frac{2}{x-3}} = f(x).$$

Därifrån ser vi att $y = f(x)$ har för varje $y \in (0, \infty)$ minst en lösning $x \in (3, \infty)$, så f är surjektiv.

Eftersom f är surjektiv och injektiv är den inverterbar. Från räkningen ovan är inversen tydligen

$$f^{-1}(x) = 3 + \frac{2}{x^2}$$

för alla $x \in (0, \infty)$.

7.

Betrakta funktionerna $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och $\cosh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formler

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$. Visa att

$$\cosh(2x) = (\cosh(x))^2 + (\sinh(x))^2 .$$

Solution:

Vi räknar

$$\begin{aligned}
(\cosh(x))^2 + (\sinh(x))^2 &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}{4} \\
&= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) + (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \\
&= \cosh(2x).
\end{aligned}$$
