TATA79/TEN2 **Dugga 2, 2018-01-04**

Inledande matematisk analys

1.

Ange och bevisa Pythagoras sats.

Solution:

Sats (Pythagoras sats)**.** Betrakta en rätvinklig triangel som har sidor med längden a, b och c. Anta att sidan mittemot den räta vinkeln har längden c. Då är

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

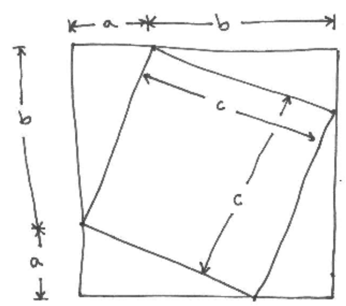
Bevis. Betrakta en kvadrat med sidorna av längden $a + b$. Markera en punkt på toppsidan som har längden a från vänsterkanten. Gör det samma på de tre andra sidorna och rita en kvadrat som har de fyra punkterna som hörnpunkter. Se figur 1.

Mittemellan de två kvadraterna finns fyra rätvinkliga trianglar som alla har sidor med längderna a, b och c.

Vi kan räkna ut arean av den störst kvadraten på två olika sätt. Det första är med den vanliga formeln för arean av en kvadrat med sidorna med längden $a+b$. Då är arean $(a+b)^2$. Det andra sättet är att addera arean av den mindre kvadraten c^2 och arean av de fyra trianglarna $ab/2$. Det vill säga arean är $c^2 + 4(ab/2)$. Eftersom båda uttrycken för arean måste vara lika får vi att

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = c^2 + 4(ab/2) = c^2 + 2ab.$$

Det medför att $a^2 + b^2 = c^2$. □



Figur 1: En kvadrat med sidor av längden c inom en kvadrat med sidor av längden $a + b$.

---

2. Bevisa Bernoullis olikhet: För alla reella tal $x \geq -1$ och alla $n \in \mathbf{Z}_+$ får man att

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Solution: Vi ger ett induktionsbevis av

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{1}$$

Först kollar vi vad som händer då $n = 1$: $(1+x)^n = (1+x) \geq (1+x) = 1 + nx$ så (1) stämmer om $n = 1$. Sen antar vi att (1) stämmer för $n = m$ där $m \in \mathbf{Z}_+$ och betraktar fallet $n = m + 1$:

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)^m(1+x) \geq (1+mx)(1+x) = 1+mx+x+mx^2 \geq 1+(m+1)x$$

så (1) stämmer för $n = m + 1$ och (1) är bevisad.

3.

Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \leq |x|, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n > |x|, \end{cases}$$

för positiva heltal n och $x \in \mathbf{R}$.

(a) Definiera exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(b) Använd Bernoullis olikhet samt definitionen av exponentialfunktionen för att visa

$$\exp(x) \geq 1 + x$$

för alla $x \in \mathbf{R}$.

Solution:

(a) $\exp(x) = \sup_{n \in \mathbf{Z}_+} \exp_n(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

(b) Om vi väljer $m > |x|$ får vi att

$$\exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

enligt definitionen av exponentialfunktionen. Bernoullis olikhet med x/m istället för x ger

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \geq 1 + m\frac{x}{m} = 1 + x$$

eftersom $x/m \geq -1$. Därmed följer det att

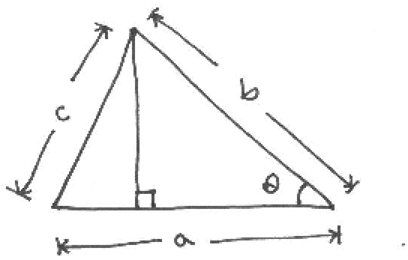
$$\exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \geq 1 + x.$$

4.

Betrakta en triangel med sidlängdorna a, b och c och en vinkel θ mittemot sidan av längden c enligt figuren nedan. Använd Pythagoras sats samt trigonometriska ettan för att bevisa

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

Likheten kallas för *cosinussatsen*.



Solution:

Enligt Pythagoras sats uppfyller triangelns höjd h både

$$h = b \sin \theta$$

och

$$h^2 + (a - b\cos\theta)^2 = c^2$$

Därför är

$$(b\sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2 = c^2 \implies b^2\sin^2\theta + a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta = c^2 \implies b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta = c^2$$

5.

(a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Låt $b > 1$ och definiera funktionen $f\colon \mathbf{R} \to (0, \infty)$ enligt formeln $f(x) = b^x$. Visa med hjälp av egenskaper hos exponentialfunktionen och den naturliga logaritmfunktionen att funktionen f är bijektiv och ge en formel för dess inversa funktionen f^{-1}.

Solution:

(a) $a^x := \exp(x\ln(a))$ för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) För givet $y \in (0, \infty)$ vill vi vissa att det finns precis en lösning $x \in \mathbf{R}$ till $y = f(x) = b^x$:

$$y = b^x \iff y = \exp(x\ln(b)) \iff \ln(y) = x\ln(b) \underset{\substack{\uparrow \\ \ln(b) > 0}}{\iff} x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$$

För givet $y \in (0, \infty)$ har vi att $y = f(x) \implies x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$ så f är injektiv och $y = f(x) \impliedby x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$ så f är surjektiv. Därför är f bijektiv. Då är formeln för inversa funktionen $f^{-1}(y) = \ln(y)/\ln(b)$.

6.

(a) Hitta alla $w \in \mathbf{C}$ så att $w^2 = 5 + 12i$. [Tips: $5^2 + 12^2 = 13^2$]

(b) Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ så att $z^2 + (4+2i)z - 2 - 8i = 0$.

Solution:

(a) Sätt $w = u + iv$ för $u, v \in \mathbf{R}$. Då är $u^2 - v^2 + 2uvi = (u+iv)^2 = 5 + 12i$ så

$$u^2 - v^2 = 5 \quad \text{och} \tag{2}$$
$$2uv = 12. \tag{3}$$

Men eftersom $|w|^2 = |5 + 12i|$ är

$$u^2 + v^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13. \tag{4}$$

Om vi adderar (2) och (4) får vi att $2u^2 = 18$ och om vi subtraherar (2) från (4) får vi att $2v^2 = 8$. Så

$$u = \pm 3 \quad \text{och} \quad v = \pm 2.$$

Ekvation (3) säger att u och v har samma tecken, så vi har bara två möjligheter: $u = 3$ och $v = 2$, eller $u = -3$ och $v = -2$. Därför är lösningar $w = 3 + 2i$ och $w = -3 - 2i$.

(b) Vi kan skriva om $z^2 + (4+2i)z - 2 - 8i = 0$ som $(z + (2+i))^2 = 5 + 12i$ så enligt första delen av uppgiften är

$$z + (2+i) = 3 + 2i \quad \text{eller} \quad z + (2+i) = -3 - 2i.$$

Därför alla lösningar är $z = 1 + i$ och $z = -5 - 3i$.

---

7. Vi vet att

$$\text{"}n^2 \text{ är jämnt delbart med 3"} \implies \text{"}n \text{ är jämnt delbart med 3"} \tag{†}$$

eftersom vi bevisade kontrapositionen i dugga 1. Använd (†) för att visa lösningar x till $x^2 = 3$ är irrationella.

Solution:

Vi ger ett motsägelsebevis: Vi antar att $x = n/m$ för $n, m \in \mathbf{Z}$ och $x^2 = 3$. Vi får också anta att n och m har inga gemensamma delare (för annars kunde vi stryka de).

Vi räknar

$$\frac{n^2}{m^2} = x^2 = 3 \implies n^2 = 3m^2$$

och därför är n^2 jämnt delbart med 3. Utifrån (†) får vi att n är jämnt delbart med 3, d.v.s. $n = 3k$ för något heltal k. Vi får igen räkna att

$$\frac{9k^2}{m^2} = \frac{(3k)^2}{m^2} = \frac{n^2}{m^2} = x^2 = 3 \implies m^2 = 3k^2$$

och därför är m^2 jämnt delbart med 3. Utifrån (†) får vi att m är jämnt delbart med 3, och därmed har vi bevisat att n och m har 3 som en gemensam delare. Det är ett motsägelse och därför måste x vara rationellt.
