Inledande matematisk analys

1.

Ange och bevisa Pythagoras sats.

Solution:

Sats (Pythagoras sats)**.** Betrakta en rätvinklig triangel som har sidor med längden a, b och c. Anta att sidan mittemot den räta vinkeln har längden c. Då är

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

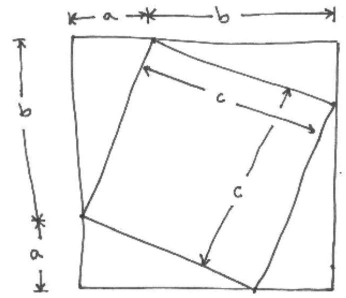
Bevis. Betrakta en kvadrat med sidorna av längden $a + b$. Markera en punkt på toppsidan som har längden a från vänsterkanten. Gör det samma på de tre andra sidorna och rita en kvadrat som har de fyra punkterna som hörnpunkter. Se figur 1.

Mittemellan de två kvadraterna finns fyra rätvinkliga trianglar som alla har sidor med längderna a, b och c.

Vi kan räkna ut arean av den störst kvadraten på två olika sätt. Det första är med den vanliga formeln för arean av en kvadrat med sidorna med längden $a+b$. Då är arean $(a+b)^2$. Det andra sättet är att addera arean av den mindre kvadraten c^2 och arean av de fyra trianglarna $ab/2$. Det vill säga arean är $c^2 + 4(ab/2)$. Eftersom båda uttrycken för arean måste vara lika får vi att

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = c^2 + 4(ab/2) = c^2 + 2ab.$$

Det medför att $a^2 + b^2 = c^2$. □



Figur 1: En kvadrat med sidor av längden c inom en kvadrat med sidor av längden $a + b$.

2.

Hitta alla $x \in \mathbf{R}$ som löser ekvationen

$$\sqrt{3}\cos(x) + 3\sin(x) = \sqrt{6}.$$

Solution:

Om vi jämför vänsterledet med

$$A\sin(v+x) = A\sin(v)\cos(x) + A\cos(v)\sin(x)$$

ser vi att det är hjälpsam att hitta A och v så att

$$\begin{aligned} A\sin(v) &= \sqrt{3} \quad \text{och} \\ A\cos(v) &= 3. \end{aligned}$$

Om vi delar den första ekvation ovan med den andra får vi att $\tan v = \sqrt{3}/3 = 1/\sqrt{3}$ så till exempel kan vi ta $v = \pi/6$. Sen behöver vi att $A^2 = A^2\sin^2 v + A^2\cos^2 v = (\sqrt{3})^2 + 3^2 = 12$. Eftersom $\sin(\pi/3)$ och $\cos(\pi/3)$ är positiva måste vi ta $A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Därför kan vi skriva om ekvation som

$$2\sqrt{3}\sin(\pi/6+x) = \sqrt{3}\cos(x) + 3\sin(x) = \sqrt{6} \iff \sin(\pi/6+x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Då vet vi att möjliga lösningar är

$$\frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{för } k \in \mathbf{Z}$$

och

$$\frac{\pi}{6} + x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{för } k \in \mathbf{Z}$$

så alla möjliga lösningar är

$$x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{för } k \in \mathbf{Z}\text{, och} \quad x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{för } k \in \mathbf{Z}.$$

3.

(a) Kom ihåg att $\exp(x) \leq 1/(1-x)$ för $x < 1$. Använd den tillsammans med andra räknareglar för att visa

$$\ln(a) \geq \frac{a-1}{a}$$

för alla $a > 0$.

(b) Skissa grafen av den naturliga logaritmfunktionen $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$.

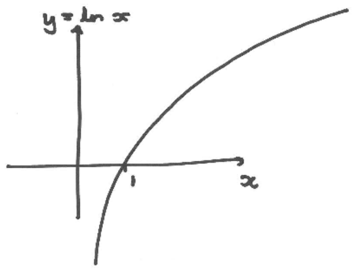
Solution:

(a) Vi vet att $\exp(x) \leq 1/(1-x)$ för $x < 1$ så vi får ta $x = \ln(a)$ så länge $a < e$. Vi får

$$a = \exp(\ln(a)) \leq \frac{1}{(1-\ln(a))} \underset{\substack{\uparrow \\ 0<a<e}}{\implies} 1 - \ln(a) \leq \frac{1}{a} \implies \ln(a) \geq \frac{a-1}{a}.$$

Om $a \geq e$ är $\ln(a) \geq 1$ och $(a-1)/a \leq 1$ så $\ln(a) \geq 1 \geq (a-1)/a$.

(b) Graphen av ln:



4.

Hitta alla lösningar $\theta \in \mathbf{R}$ till ekvationen $\cos(2\theta) - 3\cos\theta + 2 = 0$.

Solution:

Vi kan skriva om $\cos(2\theta) - 3\cos\theta + 2 = (\cos(2\theta)+1) - 3\cos\theta + 1 = 2(\cos\theta)^2 - 3\cos\theta + 1$ så ekvationen är ekvivalent med

$$0 = (\cos\theta)^2 - \frac{3}{2}\cos\theta + \frac{1}{2} = (\cos\theta - 1)\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right).$$

Lösningar är då alla θ som uppfyller antingen $\cos\theta - 1 = 0$ eller $\cos\theta - 1/2 = 0$.

$$\cos\theta - 1 = 0 \iff \cos\theta = 1 \iff \theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \quad \text{och}$$
$$\cos\theta - 1/2 = 0 \iff \cos\theta = \frac{1}{2} \iff \theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Så alla lösningar är

$$\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \quad \text{och} \quad \theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

5.

(a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Låt $b > 1$. Visa att funktionen $x \mapsto b^x$ är bijektiv och ge en formel för den inversa funktionen.

Solution:

(a) $a^x := \exp(x\ln(a))$ för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) För givet $y \in (0, \infty)$ vill vi vissa att det finns precis en lösning $x \in \mathbf{R}$ till $y = b^x$:

$$y = b^x \iff y = \exp(x\ln(b)) \iff \ln(y) = x\ln(b) \underset{\substack{\uparrow \\ \ln(b) > 0}}{\iff} x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$$

(Eftersom $y = b^x \implies x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$ är $x \mapsto b^x$ injektiv och eftersom $y = b^x \impliedby x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$ är $x \mapsto b^x$ surjektiv, därför är $x \mapsto b^x$ bijektiv.) Formeln för inversa funktionen är då $y \mapsto \ln(y)/\ln(b)$.

6.

(a) Hitta alla $w \in \mathbf{C}$ så att $w^2 = 8 + 6i$.

(b) Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ så att $z^2 + (2 + 4i)z - 11 - 2i = 0$.

Solution:

(a) Sätt $w = u + iv$ för $u, v \in \mathbf{R}$. Då är $u^2 - v^2 + 2uvi = (u + iv)^2 = 8 + 6i$ så

$$u^2 - v^2 = 8 \quad \text{och} \tag{1}$$
$$2uv = 6. \tag{2}$$

Men eftersom $|w|^2 = |8 + 6i|$ är

$$u^2 + v^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10. \tag{3}$$

Om vi adderar (1) och (3) får vi att $2u^2 = 18$ och om vi subtraherar (1) från (3) får vi att $2v^2 = 2$. Så

$$u = \pm 3 \quad \text{och} \quad v = \pm 1.$$

Ekvation (2) säger att u och v har samma tecken, så vi har bara två möljigheter: $u = 3$ och $v = 1$, eller $u = -3$ och $v = -1$. Därför är lösningar $w = 3 + i$ och $w = -3 - i$.

(b) Vi kan skriva om $z^2 + (2 + 4i)z - 11 - 2i = 0$ som $(z + (1 + 2i))^2 = 8 + 6i$ så enligt första delen av uppgiften är

$$z + (1 + 2i) = 3 + i \quad \text{eller} \quad z + (1 + 2i) = -3 - i.$$

Därför alla lösningar är $z = 2 - i$ och $z = -4 - 3i$.

7. Hitta fem lösningar $z \in \mathbf{C}$ till ekvationen $z^5 = 32$.

Solution:
Vi skriva om 32 som $32 = 32e^{0 \times i}$ och $z = re^{i\theta}$. Då får man att

$$r^5 e^{5\theta i} = (re^{i\theta})^5 = z^5 = 32 = 32e^{0 \times i}.$$

Likhetens argument måste vara lika med varandra och argumenten kan bara skilja sig med ett heltal hel varv. Därför

$$r^5 = 32 \quad (r > 0) \quad \text{och}$$
$$5\theta = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Så $r = (32)^{1/5} = 2$ och $\theta = 2k\pi/5$ för $k \in \mathbf{Z}$. Därför får vi lösningar $z = 2e^{2k\pi i/5}$ för $k \in \mathbf{Z}$. Talen $z = 2e^{2k\pi i/5}$ är olika för till exempel $k = 0, 1, 2, 3, 4$: Så fem olika lösningar z är

$$2, 2e^{2\pi i/5}, 2e^{4\pi i/5}, 2e^{6\pi i/5} \text{ och } 2e^{8\pi i/5}.$$