TATA79/TEN2 **Dugga 2, 2015-12-14**

Inledande matematisk analys

1. Visa att lösningar $x \in \mathbf{R}$ till ekvationen $x^2 = 2$ är irrationella.

Solution: Först observerar vi att ett heltal n är antingen jämnt eller udda men inte både och. Om heltalet n är udda kan man skriva det som $n = 2k + 1$ för något heltal k och

$$n^2 = (2k+1)^2 = 2(2k+1) + 1$$

som är udda. Därför om n^2 är jämnt det kan inte stämmer att n är udda och vi dra slutsatsen att

$$\text{om } n^2 \text{ är jämnt så är } n \text{ jämnt.} \tag{1}$$

Nu ger vi ett motsägelse bevis att lösningar $x \in \mathbf{R}$ till ekvationen $x^2 = 2$ är irrationella. Vi antar att x är rationellt: Därför finns det $m \in \mathbf{N}$ och $n \in \mathbf{Z}$ så att $x = n/m$. Dessutom får vi välja n och m sådana att de har inga gemensamma delare. Eftersom $x^2 = 2$ har vi att

$$n^2 = 2m^2. \tag{2}$$

så n^2 är jämnt. Därför enligt (1) är n jämnt och kan därför skrivas som $n = 2k$ för något $k \in \mathbf{Z}$. Vi sätter det in (2) och får att

$$4k^2 = (2k)^2 = 2m^2.$$

så $m^2 = 2k^2$ och därför är m^2 jämnt.

Så vi har visat att både n och m är jämna och därför har en gemensamma delare 2. Det är en motsägelse till att vi får stryka alla gemensamma faktorer och därför är x irrationellt.

2.

(a) Skissa grafen av den trigonometriska funktionen tangens. Vad är funktionens definitionsmängd?

(b) Med hjälp av en bild bevisa att

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \tag{$\clubsuit$}$$

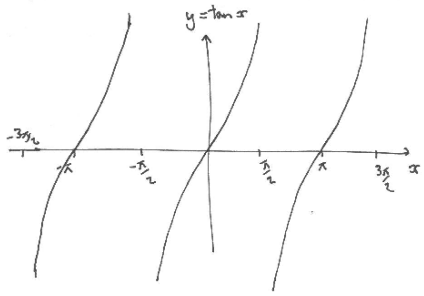
och

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

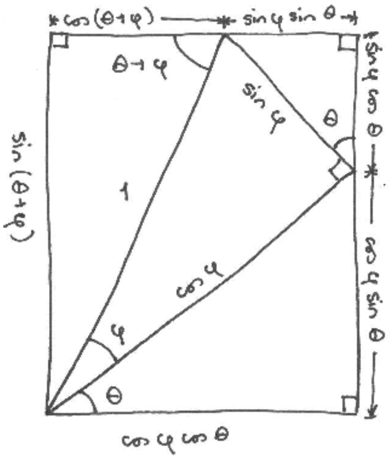
för θ och φ som uppfyller $\theta \geq 0$, $\varphi \geq 0$ och $\theta + \varphi \leq \pi/2$.

Solution:

(a) Tangens definitionsmängden är $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \neq \pi/2 + k\pi \text{ för } k \in \mathbf{Z}\}$ och grafen ser ut så här:



(b) Här kommer en bild:



Motliggande sidor av rektangeln har lika längder så

$$\cos\theta\cos\varphi = \cos(\theta+\varphi) + \sin\theta\sin\varphi$$

och

$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

Nu räcker det att skriva om likheterna.

---

3. Med hjälp av (♣) (som du kan anta gäller för alla $\theta, \varphi \in \mathbf{R}$) och den trigonometriska etten (eller genom en annan metod) visa att

$$\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$ och speciellt

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Solution:

Vi skriva om (♣) med $\varphi = \theta$ så att

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

så

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}.$$

Eftersom $0 \leq \pi/12 \leq \pi/2$ är $\sin(\pi/12)$ ickenegativt, därför kan vi ta kvadratroten ur ekvationen och får att

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi/6)}{2}} = \frac{\sqrt{1 - \cos(\pi/6)}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 - (\sqrt{3}/2)}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

4.

(a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Använder räkneregler för den exponentialfunktionen för att visa $a^{x+y} = a^x a^y$ för $a > 0$ och $x, y \in \mathbf{R}$.

Solution:

(a) $a^x := \exp(x\ln(a))$ för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Vi räknar ut att

$$a^x a^y = \exp(x\ln(a))\exp(y\ln(a)) \underset{\substack{\uparrow \\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}}{=} \exp(x\ln(a) + y\ln(a)) = \exp((x+y)\ln(a)) = a^{x+y}.$$

---

5. Betrakta ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ för givna reella tal a, b och c med $a \neq 0$. Visa att tecken av $b^2 - 4ac$ bestämmer antalet lösningar $x \in \mathbf{R}$ till ekvationen.

Solution: Vi kan skriva om

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

så det är lika med 0 om och endast om

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$

som i sin tur är ekvivalent med

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{3}$$

eftersom $a \neq 0$. Ekvation (3) har två lösningar om $b^2 - 4ac > 0$, igen lösning om $b^2 - 4ac < 0$ och en lösning om $b^2 - 4ac = 0$.

6.

(a) Definiera funktionen $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$.

(b) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\ln\left(\frac{x^2 + 3x - 10}{x + 8}\right) + \ln(x + 8) \qquad (\diamondsuit)$$

definierat? Skriva om $(\diamondsuit)$ så att det inhåller högst en logaritm. För vilka $x \in \mathbf{R}$ är din omskrivning definierad?

Solution:

(a) Funktionen $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$ definieras som inversen till exponentialfunktionen.

(b) Uttrycket $\ln(x + 8)$ är definierat för $x > -8$. Vi kan skriva om

$$\ln\left(\frac{x^2 + 3x - 10}{x + 8}\right) = \ln\left(\frac{(x-2)(x+5)}{x+8}\right)$$

och kvotet byter tecken (med en linjär faktor) då $x = -8$, -5 och 2. För stört x är alla faktorerna positiva, därför är

$$\frac{(x-2)(x+5)}{x+8} > 0 \quad \text{om } x > 2 \text{ eller } -8 < x < -5.$$

Därför är $(\diamondsuit)$ definierat för $-8 < x < -5$ och $2 < x$.

Vi kan skriva om

$$\ln\left(\frac{x^2 + 3x - 10}{x + 8}\right) + \ln(x+8) = \ln\left(\frac{(x-2)(x+5)}{x+8}\right) + \ln(x+8) = \ln((x-2)(x+5))$$

och polynomet

$$(x-2)(x+5)$$

byter tecken då $x = -5$ och 2. Därför är kvotet positivt om $x < -5$ eller $x > 2$, och

$$\ln((x-2)(x+5))$$

är definierat för $x < -5$ och $x > 2$.

---

7. Hitta fem lösningar $z \in \mathbf{C}$ till ekvationen $z^5 = 2$.

Solution:

Vi skriva om 2 som $2 = 2e^{2k\pi i}$ för $k \in \mathbf{Z}$ så man kan kolla direkt att $z = 2^{1/5}e^{2k\pi i/5}$ löser ekvationen $z^5 = 2$. Talen $2^{1/5}e^{2k\pi i/5}$ är olika för till exempel $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
