TATA79/TEN1 **Dugga 1, 2020-01-07**

Inledande matematisk analys

1.

Ge ett motsägelsebevis av följande påståendet.

”Om $n^3 + 5$ är udda för något heltal n då är n jämnt.”

Solution:

För att genomför ett motsägelsebevis antar vi att negationen är sant, det vill säga att det finns ett udda n sådant att $n^3 + 5$ också är udda. Vi vet därför att n kan skrivas som $n = 2k + 1$ för något heltal k och vi kan också räkna

$$n^3 + 5 = (2k + 1)^3 + 5 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 + 5 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k + 3).$$

Därmed är $n^3 + 5$ jämnt. Det är ett motsägelse till antagandet och därför om $n^3 + 5$ är udda för något heltal n då är n jämnt.

2.

Beräkna summan

$$\sum_{k=1}^{35} \left(3k + \frac{3 \times 2^k \times 6^k}{3^k}\right).$$

Potenser av 4 får stå kvar i ditt svar.

Solution:

Vi räknar

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{35} \left(3k + \frac{3 \times 2^k \times 6^k}{3^k}\right) &= 3\sum_{k=1}^{35} k + \sum_{k=1}^{35} 3(4)^k = \frac{3 \times 35 \times 36}{2} + 12\sum_{k=1}^{35} 4^{k-1} \\ &= \frac{3 \times 35 \times 36}{2} + 12\frac{4^{35} - 1}{4 - 1} \\ &= 1890 + 4^{36} - 4 = 1886 + 4^{36}\end{aligned}$$

3.

I varje fall nedan avgör med bevis om följden $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ är aritmetisk, geometrisk, både aritmetisk och geometrisk, eller varken aritmetisk eller geometrisk:

(a) $a_n = \frac{2^n}{3^{n+2}}$ för $n \in \mathbf{Z}_+$;

(b) $a_n = \frac{2n+n^2}{5n}$ för $n \in \mathbf{Z}_+$; och

(c) $a_n = 1$ för $n \in \mathbf{Z}_+$.

Solution:

(a) Vi räknar att

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n+3}} - \frac{2^n}{3^{n+2}} = \frac{2^n}{3^{n+2}}\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{1}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

som beror på n, så $(a_n)_n$ är inte aritmetisk. Vi räknar också att

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+3}}\right)}{\left(\frac{2^n}{3^{n+2}}\right)} = \frac{2}{3}$$

som inte beror på n, så $(a_n)_n$ är geometrisk.

(b) Vi räknar att

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1) + (n+1)^2}{5(n+1)} - \frac{2n + n^2}{5n} = \frac{2 + (n+1)}{5} - \frac{2+n}{5} = \frac{1}{5}$$

som inte beror på n, så $(a_n)_n$ är aritmetisk. Vi räknar också att

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{2(n+1)+(n+1)^2}{5(n+1)}\right)}{\left(\frac{2n+n^2}{5n}\right)} = \frac{\left(\frac{2+(n+1)}{5}\right)}{\left(\frac{2+n}{5}\right)} = \frac{3+n}{2+n} = 1 + \frac{1}{2+n}$$

som beror på n, så $(a_n)_n$ är inte geometrisk.

(c) Vi har att $a_{n+1} - a_n = 0$, så $(a_n)_n$ är aritmetisk och $a_{n+1} = a_n \times 1$, $(a_n)_n$ är geometrisk.

4.

Vilka av följande definitioner är definitionen att $\ell \in \mathbf{R}$ är den minsta övre begränsningen av en följd $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

(a) $a_n \geq \ell$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, och för varje $\varepsilon > 0$ och $n \in \mathbf{Z}_+$ är $\ell - \varepsilon < a_n$.

(b) $a_n \leq \ell$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, och för varje $\varepsilon > 0$ finns det minst ett $n \in \mathbf{Z}_+$ så att $\ell - \varepsilon < a_n$.

(c) $a_n \leq \ell$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, och för varje $n \in \mathbf{Z}_+$ finns det minst ett $\varepsilon > 0$ så att $\ell - \varepsilon < a_n$.

Med hjälp av den korrekta definitionen bevisa att

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \frac{3n^2 - 4n}{2n^2} = \frac{3}{2}.$$

Solution:

Definitionen att ℓ är den minsta övre begränsningen av $(a_n)_n$ ges i (b).

Först räknar vi att

$$\frac{3n^2 - 4n}{2n^2} = \frac{3}{2} - \frac{2}{n} \leq \frac{3}{2},$$

så $3/2$ är en övre begränsning av $(\frac{3n^2-4n}{2n^2})_n$. För att visa $3/2$ är den minsta övre begränsningar betraktar vi ett $\varepsilon > 0$ och räknar

$$\frac{3}{2} - \varepsilon < \frac{3n^2 - 4n}{2n^2} \iff \frac{3}{2} - \varepsilon < \frac{3}{2} - \frac{2}{n} \iff \varepsilon > \frac{2}{n} \iff n > \frac{2}{\varepsilon}$$

så om vi väljer $n > 2/\varepsilon$ vet vi att $\frac{3}{2} - \varepsilon < \frac{3n^2-4n}{2n^2}$ och $\frac{3}{2} - \varepsilon$ är inte en övre begräsning. Därmed är $\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \frac{3n^2-4n}{2n^2} = \frac{3}{2}$.

5.

Kom ihåg att

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

för hela tal n och k där $0 \leq k \leq n$. Visa att

$$\sum_{n=2}^{m} \binom{n}{2} = \binom{m+1}{3}$$

för varje heltal $m \geq 2$.

Solution:

Vi ger en induktionsbevis. Först kontrollerar vi basfallet $m = 2$. Vi har att

$$\sum_{n=2}^{2} \binom{n}{2} = \binom{2}{2} = 1$$

och

$$\binom{2+1}{3} = 1,$$

så likheten gäller i fallet $m = 2$. För induktionssteget antar vi att

$$\sum_{n=2}^{m} \binom{n}{2} = \binom{m+1}{3}.$$

för något heltal $m \geq 2$ och räkna med hjälp av detta att

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \binom{n}{2} &= \sum_{n=2}^{m} \binom{n}{2} + \binom{m+1}{2} = \binom{m+1}{3} + \binom{m+1}{2} \\
&= \frac{(m+1)m(m-1)}{6} + \frac{(m+1)m}{2} = (m+1)m\left(\frac{(m-1)}{6} + \frac{1}{2}\right) \\
&= (m+1)m\left(\frac{(m-1)+3}{6}\right) = \frac{(m+2)(m+1)m}{3!} \\
&= \binom{m+2}{3},
\end{aligned}$$

så enligt induktionsantagande gäller

$$\sum_{n=2}^{m} \binom{n}{2} = \binom{m+1}{3}$$

för alla heltal $m \geq 2$.
