TATA79/TEN1 **Dugga 1, 2019-11-28**

Inledande matematisk analys

1.
Betrakta polynomen $p\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och $q\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som ges av uttrycken

$$\begin{aligned} p(x) &= x^{135} + 2^{75}x^{60}, \quad \text{och} \\ q(x) &= x^2 - x - 2. \end{aligned}$$

(a) Skissa grafen av q.

(b) Räkna ut resten av p delat med q. (Du behöver inte räkna ut eventuella potenser av 2 som förekommer i ditt svar.)

Solution:

(a)

(b) Eftersom resten av p delat med q är ett polynom av grad högst 1 är resten av formen $r(x) = ax + b$ för reella tal a och b. Enligt satsen om polynomdivision vet vi att det finns ett polynom k sådant att $p(x) = q(x)k(x) + r(x)$. Vi kan även se att $q(-1) = 0$ och $q(2) = 0$. Därför är

$$\begin{aligned} 2^{75} - 1 = p(-1) &= q(-1)k(-1) + r(-1) = b - a \quad \text{och} \\ 2^{136} = p(2) &= q(2)k(2) + r(2) = 2a + b. \end{aligned}$$

Vi kan lösa ekvationsystemet övan och ser att $a = (2^{136} - 2^{75} + 1)/3$ och $b = (2^{136} + 2^{76} - 2)/3$, så resten är $r(x) = (2^{136} - 2^{75} + 1)x/3 + (2^{136} + 2^{76} - 2)/3$

---

2. Beräkna summan

$$\sum_{k=1}^{53} \left(1 + \frac{2k + 8k^2}{k}\right).$$

Solution:
Vi räknar

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{53} \left(1 + \frac{2k + 8k^2}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{53}(3 + 8k) = 3\sum_{k=1}^{53} 1 + 8\sum_{k=1}^{53} k \\ &= 3 \times 53 + 8\frac{53 \times 54}{2} = 11607 \end{aligned}$$

där vi har använt oss av formelerna $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ och $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$.

---

3. Avgör med bevis vilken av de följande följder $(a_n)_n$ som är växande eller avtagande:

(a) $a_n = \frac{3n+1}{n}$ för $n \in \mathbf{Z}_+$;

(b) $a_n = \frac{1}{n^2 - 5n + 7}$ för $n \in \mathbf{Z}_+$; och

(c) $a_n = \frac{n^2-2n}{n^2}$ för $n \in \mathbf{Z}_+$.

Solution:

(a) Vi ser att $a_n = 3 + 1/n$ så

$$a_{n+1} = 3 + \frac{1}{n+1} \leq 3 + \frac{1}{n} = a_n$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$ och därmed är $(a_n)_n$ avtagande.

(b) Vi kan räkna att $a_1 = 1/3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ och $a_4 = 1/3$, så $(a_n)_n$ är varken växande eller avtagande.

(c) Vi ser att $a_n = 1 - 2/n$ så

$$a_{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \geq 1 - \frac{2}{n} = a_n$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$ och därmed är $(a_n)_n$ växande.

4.

Välj en följd $(a_n)_n$ från uppgift 3 och utred med bevis vad följdens minst övre begränsning $\sup_n a_n$ är.

Solution:

Det räcker att svara med en av de följande exempel.

(a) Eftersom $(a_n)_n$ är avtagande är

$$a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_1 = 4$$

och därmed är 4 en övre begränsning.

Betrakta ett godtyckligt tal $b < 4$. Talet b är inte en övre begränsning eftersom 4 är ett element i själva följden, nämligen $4 = a_1$, och därför uppfyller elementet a_1 olikheten $b < a_1$.

Därför är $\sup_n = 4$.

(b) Enligt räkningar från uppgift 3 gissar vi att $\sup_n a_n = 1$.

För att visa det räknar vi

$$\frac{1}{n^2 - 5n + 7} = a_n \leq 1 \iff (n-3)(n-2)+1 \geq 1 \iff (n-3)(n-2) \geq 0.$$

Sista olikheten är uppfyllt om och endast om antingen $n \geq 3$ och $n \geq 2$, eller $n \leq 3$ och $n \leq 2$. Därför är $a_n \geq 1$ om och endast om $n \geq 3$ eller $n \leq 2$. Därför är $a_n \geq 1$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$ och 1 är en övre begränsning av $(a_n)_n$.

För att visa det är det minsta räcker det att observera att $1 = a_2$ så för varje tal $b < 1$ finns det ett element (nämligen a_2) som är större än b. Därför är 1 det minsta övre begränsningen av $(a_n)_n$

(c) Vi ser att $a_n = 1 - 2/n$ så

$$a_n = 1 - \frac{2}{n} \leq 1$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, så 1 är en övre begränsning av $(a_n)_n$.

För att visa 1 är det minsta övre begränsningen vill vi för varje $\varepsilon > 0$ visa att det finns ett $n \in \mathbf{Z}_+$ så att $1 - \varepsilon < a_n$. Det är ekvivalent med

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{2}{n} \iff \varepsilon > \frac{2}{n} \iff n > \frac{2}{\varepsilon}.$$

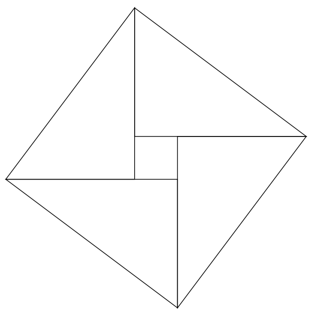
Så om vi väljer ett heltal $n > 2/\varepsilon$ är $1 - \varepsilon < a_n$.

Därmed har vi visat att 1 är den minsta övre begräsningen av $(a_n)_n$.

5.

(a) Ange Pythagoras sats.

(b) Använd bilden nedan för att ge ett bevis av Pythagoras sats.



Solution:

(a) Betrakta en rätvinklig triangel som har sidor med längden a, b och c. Anta att sidan mittemot den räta vinkeln har längden c. Då är

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

(b) Fyra rätvinkliga trianglar med samma sidolängder a, b och c (med $a \leq b < c$) kan bilda en fyrkant som i figuren ovan. Vi kan räknar ut arean av fyrkanten på två sätt. Fyrkanten har sidolängd c, så arean är c^2. Men fyrkanten är också unionen av fyra trianglar samt en mindre fyrkant, så arean är $4\frac{1}{2}ab + (b-a)^2$. Därför är

$$c^2 = 4\frac{1}{2}ab + (b-a)^2 \implies c^2 = 2ab + (b^2 - 2ab + a^2) \implies c^2 = a^2 + b^2.$$
