TATA79/TEN1 **Dugga 1, 2019-01-07**

Inledande matematisk analys

1. Marcel Riesz är matematiker och har bett sin doktorand Lars Hörmander att betrakta följande systemet av likheter:

$$\begin{cases} x(2x+7) = 39 \quad \text{och} \\ x(2x-7) = -3. \end{cases}$$

Lars har skrivit följande argument i sitt anteckningsbok:

$$\left.\begin{array}{l} x(2x+7) = 39 \quad \text{och} \\ x(2x-7) = -3 \end{array}\right\} \implies x(2x+7) + x(2x-7) = 39 - 3$$
$$\implies 4x^2 = 36 \implies x = -3 \text{ eller } x = 3.$$

(a) Skriv negationen av påståendet "$x(2x+7) = 39$ och $x(2x-7) = -3$".

(b) I följande mötet skrev Marcel om systemet till det ekvivalenta systemet:

$$\left.\begin{array}{l} (2x+13)(x-3) = 0 \quad \text{och} \\ (2x-1)(x-3) = 0. \end{array}\right\}$$

(i) Hitta alla lösningar x till Marcels system.

(ii) Är ditt svar på (i) motsägelsefult med vad Lars skrev eller inte? Motivera ditt svar.

Solution:

(a) "$x(2x+7) \neq 39$ eller $x(2x-7) \neq -3$."

(b) (i) Ekvationen $(2x+13)(x-3) = 0$ har lösningarna $x = 3$ och $x = -13/2$ och ekvationen $(2x-1)(x-3) = 0$ har lösningarna $x = 3$ och $x = 1/2$. Eftersom båda ekvationerna måste gäller samtidigt är $x = 3$ det ända lösningen till hela systemet.

(ii) Nej, det är inte motsägelsefult. Lars argument säga att om x är en lösning till systemet är $x = 3$ eller $x = -3$. I synerhet sa han aldrig att $x = -3$ måste vara en lösning, och enligt (i) ser vi att det var den inte.

---

2. Betrakta funktionen $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definierad enligt formeln

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x} & \text{om } 0 \leq x < 9 \\ 3x - 24 & \text{om } x \geq 9 \end{cases}$$

(a) Rita grafen av f.

(b) Utred med bevis om f är inverterbar eller inte.

Solution:

(a)

(b) Vi kan räkna att $f(0) = 3 = f(9)$ så f är inte injektiv och därför kan inte vara inverterbar.

Alternativt kan man argumentera att f är inte surjektiv: Det finns inget $x \in [0, \infty)$ som löser $f(x) = 0$ eftersom för $0 \leq x < 9$ är $f(x) = 0 \iff \sqrt{9 - x} = 0 \iff x = 9$ som är motsägelsefullt med antagandet $0 \leq x < 9$ och för $x \geq 9$ är $f(x) = 0 \iff 3x - 24 = 0 \iff x = 8$ som är motsägelsefullt med antagandet $x \geq 9$.

3.

Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

och använd den för att räkna ut

$$\sum_{k=1}^{100} (4k + 3).$$

Solution:

(a) Vi ger en induktionsbevis. Vi kontrollerar att likheten stämmer i fallet $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{1} k = 1$$

och

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

så likheten stämmer i fallet $n = 1$.

Vi antag att likheten stämmer för $n = m$ för något positivt heltal m och med hjälp av detta räknar

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k = \sum_{k=1}^{m} k + (m+1) &= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = (m+1)\left(\frac{m}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(m+1)((m+1)+1)}{2}\end{aligned}$$

så likheten i fallet $n = m$ medför likheten i fallet $n = m + 1$.

Enligt induktionsantagandet drar vi slutsatsen att likheten gäller för alla positiva heltal n.

(b) Vi räknar

$$\sum_{k=1}^{100} (4k + 3) = 4 \sum_{k=1}^{100} k + 3 \sum_{k=1}^{100} 1 = 4 \times \frac{100(100+1)}{2} + 3 \times 100 = 20500.$$

4.

(a) Låt I vara ett intervall. Definiera begreppen *växande* och *strängt växande* som kan gälla en funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$.

(b) Ange utan bevis vilken eller vilka av följande funktioner $g_i\colon [0,10] \to \mathbf{R}$ $(i = 1,2,3)$ är växande.

(i) $g_1(x) = \begin{cases} x-5 & \text{om } 0 \le x < 5; \\ 4+x^2 & \text{om } 5 \le x \le 10. \end{cases}$

(ii) $g_2(x) = (x-5)^3$ för $x \in [0,10]$.

(iii) $g_3(x) = \begin{cases} x-5 & \text{om } 0 \le x < 5; \\ x^2-30 & \text{om } 5 \le x \le 10. \end{cases}$

Solution:

(a) En funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ kallas för *växande* om $x < y$ medför att $f(x) \le f(y)$ för alla $x, y \in I$. En funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ kallas för *strängt växande* om $x < y$ medför att $f(x) < f(y)$ för alla $x, y \in I$.

(b) (i) Växande.

(ii) Växande.

(iii) Ej växande. (Eftersom till exempel $g(4) = -1 > -5 = g(5)$)

5.

(a) Definiera vad det betyder att säga $u \in \mathbf{R}$ är en minsta övre begränsning till en icketom mängd $A \subset \mathbf{R}$.

(b) Bevisa att den minsta övre begränsning till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är $1/2$ där

$$b_n = \frac{n-4}{2n}$$

för varje positivt heltal n.

Solution:

(a) Det betyder att

(i) $a \le u$ för alla $a \in A$, och

(ii) till varje $\varepsilon > 0$ finns det $a \in A$ så att $u - \varepsilon < a$.

(b) Först vill vi kolla att $1/2$ är en övre begränsning av $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Vi vill visa att

$$\frac{n-4}{2n} \le \frac{1}{2}.$$

Men vi har att

$$\frac{n-4}{2n} \le \frac{1}{2} \iff n-4 \le n \iff -4 \le 0$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$. Eftersom $-4 \le 0$ stämmer och $-4 \le 0 \implies \frac{n-4}{2n} \le \frac{1}{2}$ är $1/2$ en övre begränsning till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$

För att bevisa $1/2$ är den minsta övre begränsningen till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ måste vi visa att varje tal strängt mindre än $1/2$ inte är en övre begränsning till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Det räcker att för varje $\varepsilon > 0$ hitta ett n så att

$$\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{n-4}{2n}.$$

Men

$$\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{n-4}{2n} \iff 2n\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) < n - 4 \iff n > \frac{4}{2\varepsilon}.$$

Därför om vi väljer n tillräckligt stort, mer precis sagt om vi väljer $n > 2/\varepsilon$, är $b_n > 1/2 - \varepsilon$ så $1/2 - \varepsilon$ kan inte vara en övre begränsning till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Därför drar vi slutsatsen att $1/2$ är den minsta övre begränsningen till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.
