TATA79/TEN1 **Dugga 1, 2018-11-29**

Inledande matematisk analys

1. Marcel Riesz är matematiker och har bett sin doktorand Lars Hörmander att betrakta följande systemet av likheter:

$$\begin{cases} x(2x+7) = 39 \quad \text{och} \\ x(2x-7) = -3. \end{cases}$$

Lars har skrivit följande argument i sitt anteckningsbok:

$$\left.\begin{aligned} x(2x+7) &= 39 \quad \text{och} \\ x(2x-7) &= -3 \end{aligned}\right\} \implies x(2x+7) + x(2x-7) = 39 - 3$$
$$\implies 4x^2 = 36 \implies x = -3 \text{ eller } x = 3.$$

(a) Skriv kontrapositionen av påståendet "Om $x(2x+7) = 39$ och $x(2x-7) = -3$ är $x = -3$ eller $x = 3$".

(b) Marcel säger att Lars argument visar att systemet har två lösningar men Lars säger att det inte räcker. Vem har rätt?

(c) Vilka eller vilken av implikationerna i Lars argument ovan kan inte förstärkas till en ekvivalens?

Solution:

(a) "Om $x \neq -3$ och $x \neq 3$ är $x(2x+7) \neq 39$ eller $x(2x-7) \neq -3$."

(b) Lars har rätt.

(c) Första implikations pil är inte en ekvivalens.

---

2. Betrakta funktionen $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definierad enligt formeln

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x & \text{if } 0 \leq x < 5 \\ 2x - 5 & \text{if } x \geq 5 \end{cases}$$

(a) Rita grafen av f.

(b) Utred med bevis om f är inverterbar eller inte.

Solution:

(a)

(b) Vi kan räkna att $f(0) = 5 = f(5)$ så f är inte injektiv och därför kan inte vara inverterbar.

Alternativt kan man argumentera att f är inte surjektiv: Det finns iget $x \in [0,\infty)$ som löser $f(x) = 0$ eftersom för $0 \leq x < 5$ är $f(x) = 0 \iff 5 - x = 0 \iff x = 5$ som är motsägelsefullt med antagandet $0 \leq x < 5$ och för $x \geq 5$ är $f(x) = 0 \iff 2x - 5 = 0 \iff x = 5/2$ som är motsägelsefullt med antagandet $x \geq 5$.

3.

Betrakta summan

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{2-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

(a) Skriv om summan S_n till en summa som innehåller högst två termer.

(b) Bevisa att

$$S_n \leq 2$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Solution:

(a) Vi räkna med hjälp av (A.17) att

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{2-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{4}{3}\left(\frac{1-(1/3)^n}{1-(1/3)}\right) = 2\left(1-(1/3)^n\right) = 2-2(1/3)^n.$$

(b) Enligt räkningen ovan är $S_n = 2 - 2(1/3)^n \leq 2$ för alla $n \geq 1$.

4.

(a) Låt I vara ett intervall. Definiera begreppen *avtagande* och *strängt avtagande* som kan gälla en funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$.

(b) Antag att $f\colon I \to \mathbf{R}$ och $g\colon I \to \mathbf{R}$ är strängt avtagande. Avgör vilka eller vilket av följande slutsatser man kan dra:

(i) $f + g$ är strängt avtagande;

(ii) fg är strängt avtagande.

Motivera ditt svar med ett bevis i varje fall.

Solution:

(a) En funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ kallas för *avtagande* om $x < y$ medför att $f(x) \geq f(y)$ för alla $x, y \in I$. En funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ kallas för *strängt avtagande* om $x < y$ medför att $f(x) > f(y)$ för alla $x, y \in I$.

(b) (i) Man kan dra slutsatsen att $f + g$ är strängt avtagande. Från definitionen att f och g är strängt avtagande vet vi att $x < y \implies f(x) > f(y)$ och $g(x) > g(y)$ för alla $x, y \in I$. Därför vet vi att $x < y \implies (f + g)(x) = f(x) + g(x) > f(y) + g(y) = (f + g)(y)$ för alla $x, y \in I$, så $f + g$ är strängt avtagande.

(ii) I allmänt är fg inte strängt avtagande. Till exempel $f(x) = g(x) = -x$ är strängt avtagande på $I := [-5, 5]$ men $2 < 3$ och $(fg)(2) = f(2)g(2) = 4 \not> 9 = f(3)g(3) = (fg)(3)$ så fg är inte strängt avtagande på I.

5.

(a) Definiera vad det betyder att säga $\ell \in \mathbf{R}$ är en största undre begränsning till en icketom mängd A.

(b) Bevisa att den största undre begränsning till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är $1/3$ där

$$b_n = \frac{n+11}{3n}$$

för varje positivt heltal n.

Solution:

(a) Det betyder att

(i) $\ell \leq a$ för alla $a \in A$, och

(ii) till varje $\varepsilon > 0$ finns det $a \in A$ så att $\ell + \varepsilon > a$.

(b) Först vill vi kolla att $1/3$ är en undre begränsning av $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Vi vill visa att

$$\frac{n+11}{3n} \geq \frac{1}{3}.$$

Men vi har att

$$\frac{n+11}{3n} \geq \frac{1}{3} \iff n + 11 \geq n \iff 11 \geq 0$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$ och olikheten $11 \geq 0$ stämmer. Därför är $1/3$ en undre begränsning till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$

För att bevisa $1/3$ är den största undre begränsningen till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ måste vi visa att varje tal strängt större än $1/3$ inte är en största undre begränsning till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Det räcker att för varje $\varepsilon > 0$ hitta ett n så att

$$\frac{n+11}{3n} < \frac{1}{3} + \varepsilon.$$

Men

$$\frac{n+11}{3n} < \frac{1}{3} + \varepsilon \iff n + 11 < \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) 3n = n + 3n\varepsilon \iff n > \frac{11}{3\varepsilon}.$$

Därför om vi väljer n tillräckligt stort, mer precis sagt om vi väljer $n > 11/(3\varepsilon)$, är $b_n < 1/3 + \varepsilon$ så $1/3 + \varepsilon$ kan inte vara en största undre begränsning till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Därför drar vi slutsatsen att $1/3$ är den största undre begränsningen till $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.