**TATA79/TEN1** **Dugga 1, 2016-11-26**

**Inledande matematisk analys**

**1.**

(a) Ge kontrapositionen av påståendet:

$$\text{"}x \geq 5 \implies x^2 - 7x + 12 \geq 2.\text{"} \qquad (\clubsuit)$$

(b) Bevisa att påståendet ($\clubsuit$) är sant.

(c) Hitta talet $y$ så att påståendet

$$\text{"}y \leq x \leq 5 \iff x^2 - 7x + 12 \leq 2\text{"}$$

är sant. Motivera ditt val av $y$.

---

**Solution:**

(a) Kontrapositionen av ($\clubsuit$) är

$$\text{"}x^2 - 7x + 12 < 2 \implies x < 5\text{"}$$

(b) Vi har att

$$x^2 - 7x + 12 \geq 2 \iff x^2 - 7x + 10 \geq 0 \iff (x-5)(x-2) \geq 0$$

så ($\clubsuit$) är ekvivalent med

$$\text{"}x \geq 5 \implies (x-5)(x-2) \geq 0.\text{"} \qquad (1)$$

Men

$$x \geq 5 \implies \left\{ \begin{array}{c} x - 5 \geq 0 \\ \text{och} \\ x - 2 \geq 3 > 0 \end{array} \right\} \implies (x-5)(x-2) \geq 0 \cdot (x-2) = 0,$$

så (1) är bevisat och därför så är ($\clubsuit$).

(c) Som ovan

$$x^2 - 7x + 12 \leq 2 \iff x^2 - 7x + 10 \leq 0 \iff (x-5)(x-2) \leq 0$$

och

$$(x-5)(x-2) \leq 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} \text{både } x-5 \leq 0 \text{ och } x-2 \geq 0 \\ \text{eller} \\ \text{både } x-5 \geq 0 \text{ och } x-2 \leq 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} \text{både } x \leq 5 \text{ och } x \geq 2 \\ \text{eller} \\ \text{både } x \geq 5 \text{ och } x \leq 2. \end{array} \right.$$

Men eftersom vi kan inte ha $x \geq 5$ och $x \leq 2$ samtidigt är

$$x^2 - 7x + 12 \leq 2 \iff 2 \leq x \leq 5$$

så $y = 2$.

**2.**

(a) Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

för $n \in \mathbf{N}$.

(b) Räkna ut

$$\sum_{k=1}^{10} (12k+3).$$

**Solution:**

(a) Det finns flera metoder. Till exempel vi kan använder induktion: Vi vill bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

för $n \in \mathbf{N}$.

I fallet $n = 1$ kan vi kolla direkt att

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{1} k = 1$$

och

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

så (2) stämmer i fallet $n = 1$.

Nu antar vi (2) med $n = m$ för något $m \in \mathbf{N}$ och betraktar vänsterledet i (2) med $n = m + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k = \sum_{k=1}^{m} k + (m+1) \underset{\substack{\uparrow \\ (2) \text{ med } n = m}}{=} \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) &= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2(m+1)}{2} \\ &= \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{(m+1)((m+1)+1)}{2}\end{aligned}$$

som är högerledet i (2) med $n = m + 1$. Så vi har bevisat att (2) med $n = m$ medför (2) med $n = m + 1$.

Enligt induktion är (2) bevisad för alla $n \in \mathbf{N}$.

(b) Vi kan räkna att

$$\sum_{k=1}^{10} (12k+3) = \sum_{k=1}^{10} 12k + \sum_{k=1}^{10} 3 = 12 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 3.$$

men $\sum_{k=1}^{10} k = 10(10+1)/2$ från (a) och

$$\sum_{k=1}^{10} 3 = \underbrace{3+3+\cdots+3}_{10 \text{ gånger}} = 10 \cdot 3.$$

Därför är

$$12\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 3 = 12 \cdot \frac{10 \cdot (10+1)}{2} + 10 \cdot 3 = 660 + 30 = 690.$$

---

**3.**

(a) Ge definitionen att en icketom mängd $A$ är uppåt begränsad.

(b) Bevisa att följden $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ är uppåt begränsad där $a_n$ definieras enligt uttrycket

$$a_n = \frac{1}{(n+5)!}\binom{n+5}{5}$$

för $n \in \mathbf{N}$.

---

**Solution:**

(a) Man säger att mängden $A$ är *uppåt begränsad* om det finns $C \in \mathbf{R}$ så att

$$a \leq C \quad \text{för alla } a \in A.$$

(b) Vi har att

$$a_n = \frac{1}{(n+5)!}\binom{n+5}{5} = \frac{(n+5)!}{(n+5)!5!(n+5-5)!} = \frac{1}{5!n!},$$

men $n! \geq 1$ för alla $n \in \mathbf{N}$ och $5! = 120 > 0$ så

$$a_n = \frac{1}{5!n!} \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

och därför är $a_n \leq 1/150$ för alla $n \in \mathbf{N}$. Vi har visat att definitionen gäller med $C = 1/120$ så $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ är uppåt begränsad.

---

**4.**

(a) Låt $I$ vara ett intervall. Definiera begreppet *växande* som gäller för en funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$.

(b) Betrakta en funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formeln

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{om } x \in [0,4); \\ 4x+4 & \text{om } x \in [4,\infty). \end{cases}$$

~~för alla $x \in [6,\infty)$~~. Visa att $f$ är växande.

↑
Studenderna meddelades att stryka det här.

**Solution:**

(a) En funktion $f : I \to \mathbf{R}$ kallas för *växande* om $x < y$ medför att $f(x) \leq f(y)$ för alla $x, y \in I$.

(b) Observera att $f(x) = 5x$ för alla $x \in [0, 4]$: att det gäller för $x \in [0, 4)$ följer direkt från definitionen av $f$ och om $x = 4$ är $f(x) = f(4) = 4 \cdot 4 + 4 = 5 \cdot 4 = 5x$. Därför

$$0 \leq x < y \leq 4 \implies 5x \leq 5y \implies f(x) \leq f(y). \tag{3}$$

Vi har att $f(x) = 4x + 4$ för alla $x \in [4, \infty)$ så

$$4 \leq x < y \implies 4x \leq 4y \implies 4x + 4 \leq 4y + 4 \implies f(x) \leq f(y). \tag{4}$$

Sista fallet att betrakta är $0 \leq x \leq 4 \leq y$. Men i så fall kan vi använda (3) och (4): $0 \leq x \leq 4 \implies f(x) \leq f(4)$ och $4 \leq y \implies f(4) \leq f(y)$ så

$$0 \leq x \leq 4 \leq y \implies f(x) \leq f(4) \leq f(y). \tag{5}$$

Om $0 \leq x < y$ så är antingen $0 \leq x < y \leq 4$, $4 \leq x < y$ eller $0 \leq x \leq 4 \leq y$. Därför (3), (4) och (5) medför att $f(x) \leq f(y)$, så $f$ är växande.

---

**5.**

(a) Definiera vad det betyder att säga $u \in \mathbf{R}$ är en minsta övre begränsning till en icketom mängd $A$.

(b) Betrakta mängden $A = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 - 4x + 3 < 0\}$. Bevisa att $\sup A = 3$.

---

**Solution:**

(a) Det betyder att

(i) $a \leq u$ för alla $a \in A$, och

(ii) till varje $\varepsilon > 0$ finns det $a \in A$ så att $u - \varepsilon < a$.

(b) Vi kan faktorisera $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ så

$$A = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 - 4x + 3 < 0\} = \{x \in \mathbf{R} \,|\, (x - 1)(x - 3) < 0\}.$$

Olikheten $(x - 1)(x - 3) < 0$ gäller om och endast om

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 1 < 0 \text{ och } x - 3 > 0, \\ \text{eller} \\ x - 1 > 0 \text{ och } x - 3 < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} x < 1 \text{ och } x > 3, \\ \text{eller} \\ x > 1 \text{ och } x < 3 \end{array} \right\}$$

Men $x < 1$ och $x > 3$ kan inte gäller samtidigt, så

$$A = \{x \in \mathbf{R} \,|\, 1 < x < 3\} = (1, 3).$$

Därför är $x \leq 3$ för alla $x \in A$ och 3 är då en övre begränsning (d.v.s (i) uppfylles).

Nu vill vi till varje $\varepsilon > 0$ hitta ett $a \in A$ så att $3 - \varepsilon < a$. Om $0 < \varepsilon < 2$ är $1 < 3 - \varepsilon < 3$ så om vi väljer $a = 3 - \varepsilon/2$ till exempel, så har vi att

$$1 < 3 - \varepsilon < 3 - \varepsilon/2 = a < 3$$

så $a \in A$ och $3 - \varepsilon < a$. Det vill säga (ii) uppfylles.

Om $\varepsilon \geq 2$ har vi att $3 - \varepsilon \leq 1 < 3$ så vi kan välja $a = 2$, till exempel. Då är

$$3 - \varepsilon \leq 1 < 2 = a < 3$$

så $a \in A$ och $3 - \varepsilon < a$. Det vill säga (ii) uppfylles.

Då har vi visat att (i) och (ii) uppfylles med $u = 3$, så $\sup A = 3$.

---