TATA79/TEN3 **Tentamen, 2020-08-18**

Inledande matematisk analys

1. Låt $a, b \in \mathbf{R}$ och $\alpha > 1$ vara konstanter.

(a) Visa att ett $z \in \mathbf{C}$ lyder

$$|z - a - ib| = \alpha|z|$$

om och endast om

$$\left(x + \frac{a}{\alpha^2 - 1}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{\alpha^2 - 1}\right)^2 = \frac{\alpha^2\left(a^2 + b^2\right)}{(\alpha^2 - 1)^2}$$

där $z = x + iy$ för $x, y \in \mathbf{R}$.

(b) Beskriv geometriskt mängden av alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $|z-a-ib| = \alpha|z|$.

Solution:

(a) Vi räknar

$$\begin{aligned}
&|z - a - ib| = \alpha|z| \\
&\iff (x - a)^2 + (x - b)^2 = \alpha^2(x^2 + y^2) \\
&\iff (\alpha^2 - 1)x^2 + 2ax - a^2 + (\alpha^2 - 1)y^2 + 2yb - b^2 = 0 \\
&\iff (\alpha^2 - 1)\left(x + \frac{a}{\alpha^2 - 1}\right)^2 - \frac{a^2}{\alpha^2 - 1} - a^2 + (\alpha^2 - 1)\left(y + \frac{b}{\alpha^2 - 1}\right)^2 - \frac{b^2}{\alpha^2 - 1} - b^2 = 0 \\
&\iff \left(x + \frac{a}{\alpha^2 - 1}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{\alpha^2 - 1}\right)^2 = \frac{\alpha^2\left(a^2 + b^2\right)}{(\alpha^2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

(b) Mängden av lösningar är en cirkel i (den komplexa) planet med medelpunkten $\frac{a}{1-\alpha^2} + i\frac{b}{1-\alpha^2}$ och radian $\frac{\alpha\sqrt{a^2+b^2}}{(\alpha^2-1)}$.

---

2. Betrakta talen

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{och} \quad b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

(a) Verifiera att både $x = a$ och $x = b$ är lösningar till ekvationen

$$1 + x = x^2.$$

(b) Fibbonaccis talföljd $(F_n)_n$ är en föjld som är definierad rekursivt enligt

$$\begin{aligned}
&F_1 = 1, \\
&F_2 = 1 \quad \text{och} \\
&F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{för } n > 2.
\end{aligned}$$

Visa att

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

Solution:

(a) Vi räknar att om $x = a$ är

$$1 + x = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

och

$$x^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

så $x = a$ är en lösning.

Vi kan också räkna att om $x = b$ är

$$1 + x = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

och

$$x^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

så $x = b$ är en lösning.

(b) Vi sätter

$$G_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} \tag{1}$$

så vi behöver visa att $F_n = G_n$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

Vi ser direkt att

$$G_1 = \frac{a^1 - b^1}{a - b} = 1,$$

och, med hjälpa av (a), att

$$G_2 = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(1+a) - (1+b)}{a - b} = \frac{a - b}{a - b} = 1$$

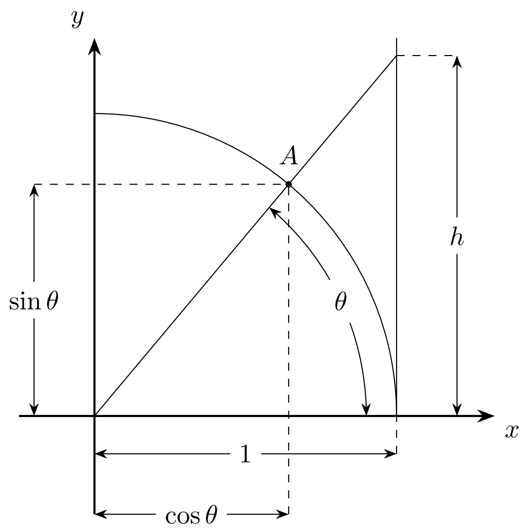
så $F_1 = G_1$ och $F_2 = G_2$.

För att visa $F_n = G_n$ för andra n räcker det att visa $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ för då uppfyller G_n samma definition som F_n (eller man kan tänker att det är ett induktionsbevis). Återigen med hjälp av (a) är

$$\begin{aligned} G_{n-1} + G_{n-2} &= \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b} + \frac{a^{n-2} - b^{n-2}}{a - b} \\ &= \frac{a^{n-2}(a+1) - b^{n-2}(b+1)}{a - b} \\ &= \frac{a^{n-2}a^2 - b^{n-2}b^2)}{a - b} \\ &= \frac{a^n - b^n)}{a - b} = G_n. \end{aligned}$$

Därmed have vi visat att $F_n = G_n$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

3. Nedan finns en bild av en punkt A med koordinaterna $(\cos\theta, \sin\theta)$ där $\theta \in [0, \pi/2]$ och en del av enhetscirkeln med medelpunkt i origo.



(a) Vad är h uttryckt i θ? Motivera ditt svar.

(b) Med stöd från bilden bevisa olikheterna

$$\sin\theta \leq \theta \leq \tan\theta$$

för $\theta \in [0, \pi/2]$.

Solution:

(a) Betrakta rätvinkliga triangeln T_1 med hypotenusen från A till origo och en katet på x-axeln och den andra parallela med y-axeln. Kateterna har längderna $\cos\theta$ och $\sin\theta$. Om vi förstorar triangeln så att kateten med längd $\cos\theta$ blir längd 1 blir de två andra sidolängderna multiplicerad med $1/\cos\theta$. Eftersom andra kateten hade längd $\sin\theta$ har den förstorade triangeln en katet av längd $\sin\theta/\cos\theta = \tan\theta$. I bilden ser vi (möjligtvis en förfyttning av) den förstorde triangel T_2 med en katet längs x-axeln och den andra som den utsökta längden h. Därför är $h = \tan\theta$.

(b) Betrakta triangeln T_2 vi diskuterade ovan. Det finns även en kil K med sin spets i origo och den avrundade kanten från x-axeln till A med längd θ. K är en delmängd av T_1. Triangel T_3 med hörnpunkter i origo, A och skärningspunkt mellan kilans avrundade kant och x-axeln är en delmängd av K. Därför är

$$|T_3| \leq |K| \leq |T_2|$$

så

$$\frac{\sin\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\tan\theta}{2}$$

och därför $\sin\theta \leq \theta \leq \tan\theta$ för $\theta \in [0, \pi/2]$.

4. Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n < |x|, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n \geq |x|, \end{cases}$$

för positiva heltal n och $x \in \mathbf{R}$.

(a) Definiera exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och talel e.

(b) Visa att

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) \leq \frac{1}{\exp_n(-x)}$$

om $n > |x|$.

(c) Använd (b) för att visa

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för alla $n \geq 3$.

Solution:

(a) $\exp(x) = \sup_{n \in \mathbf{Z}_+} \exp_n(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ och $e = \exp(1)$.

(b) Eftersom $\exp(x) = \sup_{n \in \mathbf{Z}_+} \exp_n(x)$ är $\exp(x)$ en över begränsning av $(\exp_n(x))_n$, så är

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) \tag{2}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{Z}_+$.

Eftersom (2) gäller för alla $x \in \mathbf{R}$ kan vi sätta $-x$ in istället för x och får

$$\exp_n(-x) \leq \exp(-x) \implies \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp_n(-x)} \tag{3}$$

för $n > |x|$, eftersom i så fall är $\exp_n(x) > 0$.

Därför ger (2) och (3) att

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp_n(-x)}. \tag{4}$$

(c) Om vi sätter $x = 1$ och definitionen av $\exp_n$ in i första olikhet i (4) för vi att

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp_n(1) \leq \exp(1) = e$$

för $n \geq 2$. Om vi sätter $x = 1$ och definitionen av $\exp_n$ in i sista olikhet i (4) får vi att

$$e = \exp(1) \leq \frac{1}{\exp_n(-1)} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

för $n \geq 2$, så

$$e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för $n \geq 3$. Allihop då är

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för $n \geq 3$.

5.

I föregående tentan (2020-03-19) räknade vi att

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

Med hjälp av det räkna ut exakta värden av $\cos(\pi/32)$ och $\sin(\pi/32)$.

Solution:

Vi har att

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$$

så

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{32}\right) \\ \Longrightarrow \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{32}\right). \end{aligned}$$

Eftersom $\sin\theta > 0$ för $\theta \in (0, \pi)$ är

$$\sin\left(\frac{\pi}{32}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

Vi har också att

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

så

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{32}\right) - 1 \\ \Longrightarrow \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{32}\right) - 1 \\ \Longrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{32}\right) &= \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \end{aligned}$$

ty $\cos\theta > 0$ för $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

6.

Använd trigonometriska likheterna

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi,$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

och

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

($\theta, \varphi \in \mathbf{R}$) för att visa

$$\cos^3\theta = \frac{\cos(3\theta) + 3\cos\theta}{4}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

Solution:

Man kan räckna ut att

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta) = \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta \\ &= \cos(\theta+\theta)\cos\theta - \sin(\theta+\theta)\sin\theta \\ &= (\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta)\cos\theta - (\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta)\sin\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

Och därför är

$$\cos^3\theta = \frac{\cos(3\theta) + 3\cos\theta}{4}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

7.

För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\ln\left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 7}\right) - \ln(x+3) \qquad (\diamondsuit)$$

definierat? Skriva om ($\diamondsuit$) så att det inhåller högst en logaritm. För vilka $x \in \mathbf{R}$ är din omskrivning definierad?

Solution:

För att ($\diamondsuit$) ska vara definierat måste både termerna i ($\diamondsuit$) vara definierade. Den naturliga logaritm funktionen är definierade på positiva reella tal så uttrycket $\ln(x+3)$ är definierat för $x > -3$. Vi kan skriva om

$$\ln\left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 7}\right) = \ln\left(\frac{(x-1)(x+3)}{x+7}\right) \qquad (5)$$

och kvotet byter tecken (med en linjär faktor) då $x = -7$, -3 och 1. För stört x är alla faktorerna positiva, därför är

$$\frac{(x+3)(x-4)}{x+1} > 0 \quad \text{om } x > 1 \text{ eller } -7 < x < -3. \qquad (6)$$

För att ($\diamondsuit$) ska vara definierat kräver därför att villkoret i (5) är uppfyllt och $x > -3$. Därför är ($\diamondsuit$) definierat för $x > 1$.

Vi kan skriva om

$$\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x+7}\right)-\ln(x+3)=\ln\left(\frac{(x-1)(x+3)}{x+7}\right)-\ln(x+3)=\ln\left(\frac{(x-1)}{(x+7)}\right)$$

och kvotet

$$\frac{(x-1)}{(x+7)}$$

är positivt om $x<-7$ eller $x>1$, så

$$\ln\left(\frac{(x-1)}{(x+7)}\right)$$

är definierat för $x<-7$ och $x>1$.
