TATA79/TEN3 **Tentamen, 2020-03-19**

Inledande matematisk analys

1. Låt $a, b \in \mathbf{R}$ och $\alpha > 1$ vara konstanter.

(a) Visa att ett $z \in \mathbf{C}$ lyder

$$|z - a - ib| = \alpha |z|$$

om och endast om

$$\left(x + \frac{a}{\alpha^2 - 1}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{\alpha^2 - 1}\right)^2 = \frac{\alpha^2 \left(a^2 + b^2\right)}{(\alpha^2 - 1)^2}$$

där $z = x + iy$ för $x, y \in \mathbf{R}$.

(b) Beskriv geometriskt mängden av alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $|z - a - ib| = \alpha |z|$.

Solution:

(a) Vi räknar

$$\begin{aligned}
&|z - a - ib| = \alpha|z| \\
&\iff (x - a)^2 + (x - b)^2 = \alpha^2(x^2 + y^2) \\
&\iff (\alpha^2 - 1)x^2 + 2ax - a^2 + (\alpha^2 - 1)y^2 + 2yb - b^2 = 0 \\
&\iff (\alpha^2 - 1)\left(x + \frac{a}{\alpha^2 - 1}\right)^2 - \frac{a^2}{\alpha^2 - 1} - a^2 + (\alpha^2 - 1)\left(y + \frac{b}{\alpha^2 - 1}\right)^2 - \frac{b^2}{\alpha^2 - 1} - b^2 = 0 \\
&\iff \left(x + \frac{a}{\alpha^2 - 1}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{\alpha^2 - 1}\right)^2 = \frac{\alpha^2 \left(a^2 + b^2\right)}{(\alpha^2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

(b) Mängden av lösningar är en cirkel i (den komplexa) planet med medelpunkten $\frac{a}{1-\alpha^2} + i\frac{b}{1-\alpha^2}$ och radian $\frac{\alpha\sqrt{a^2+b^2}}{(\alpha^2-1)}$.

---

2. Bevisa att

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad (\text{⌂})$$

för varje positivt heltal n.

Solution: Vi ger en induktionsbevis. Vi kan kontrollera direkt att

$$\sum_{j=1}^{1} j^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

så (⌂) är sant när $n = 1$.

För att visa induktionssteget antar vi att

$$\sum_{j=1}^{m} j^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

och räknar att

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m+1} j^3 &= \sum_{j=1}^{m} j^3 + (m+1)^3 \\
&= \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3 \\
&= \frac{(m+1)^2}{4}\big(m^2 + 4(m+1)\big) \\
&= \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4},
\end{aligned}$$

som är (⌂) med $n = m+1$, så induktionssteget är bevisat.

Enligt induktionsprincipen är (⌂) bevisat för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

---

3. Betrakta mängden

$$P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le y < x^3 \text{ och } 0 \le x < h\}.$$

(a) Skissa mängden P.

(b) Bevisa genom lämpliga uppskattningar med enkla mängder att arean $|P|$ av P är $h^4/4$. Formeln (⌂) kan vara till nytta. Om du behöver räkna ut en supremum eller infimum, räcker det med en kort förklaring och inget bevis av just detta steg krävs.

Solution:

Man kan underskatta mängden P med mängden E_n som är unionen av $n-1$ icke överlappande rektangulära mängder $[hj/n, h(j+1)/n) \times [0, (hj/n)^3)$ $(j = 1, \dots, n-1)$. Se figuren nedan. Eftersom $E_n \subseteq P$ är $|E_n| \le |P|$. Vi kan räkna

$$|E_n| = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h}{n}\left(\frac{hj}{n}\right)^3 = \frac{h^4}{n^4}\sum_{j=1}^{n-1} j^3 \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{⌂})}}{=} \frac{h^4}{n^4}\frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{h^4}{4} - \frac{h^4}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right) \ge \frac{h^4}{4} - \frac{h^4}{2n}.$$

Vi kan också överskatta mängden P med mängden F_n som är unionen av n icke överlappande rektangulära mängder $[h(j-1)/n, hj/n) \times [0, (hj/n)^3)$ $(j = 1, \dots, n)$. Se figuren nedan. Eftersom $F_n \supseteq P$ är $|F_n| \ge |P|$. Vi kan räkna

$$|F_n| = \sum_{j=1}^{n} \frac{h}{n}\left(\frac{hj}{n}\right)^3 = \frac{h^4}{n^4}\sum_{j=1}^{n} j^3 \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{⌂})}}{=} \frac{h^4}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{h^4}{4} + \frac{h^4}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\right) \le \frac{h^4}{4} + \frac{h^4}{n}.$$

Vi vet därför att

$$\sup_n\left(\frac{h^4}{4} - \frac{h^4}{2n}\right) \le \sup_n |E_n| \le |P| \le \inf_n |F_n| \le \inf_n\left(\frac{h^4}{4} + \frac{h^4}{n}\right)$$

men det säger att $h^4/4 \le |P| \le h^4/4$, så $|P| = h^4/4$.

4.

Ge ett fullständigt bevis av likheten

$$\exp(x)\exp(-x) = 1.$$

Använd gärna beviset av sats F.4 som finns i föreläsningsanteckningar som stöd. Det duger inte att rakt av kopiera det utan du måste skriva det med dina egna ord för att visa att du förstår det du gör.

Solution:

Det är ju del 3 av sats F.4, men ni behöver redovisa det med egna ord.

5.

Vi har räknat i dugga 2 (2020-01-14) att

$$\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Med hjälp av det räkna ut exakta värden av $\cos(\pi/16)$ och $\sin(\pi/16)$.

Solution:

Vi har att

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$$

så

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{16}\right) \\ \implies \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{16}\right). \end{aligned}$$

Eftersom $\sin\theta > 0$ för $\theta \in (0, \pi)$ är

$$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

Vi har också att

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

så

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right) - 1 \\ \implies \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right) - 1 \\ \implies \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) &= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \end{aligned}$$

ty $\cos\theta > 0$ för $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

6.

Definiera en följd rekursivt $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ genom reglerna

$$a_1 = \sqrt{2} \quad \text{och} \quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}.$$

för varje $n \in \mathbf{Z}_+$. Visa att $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ är växande och uppåtbegränsad. (Tips: Jämför med uppgift 5.)

Solution: Definiera $b_n = 2\cos(2^{-n-1}\pi)$ för varje $n \in \mathbf{Z}_+$. Observera att $b_1 = 2\cos(\pi/4) = \sqrt{2}$ och från dubbelvinkel formeln får vi att

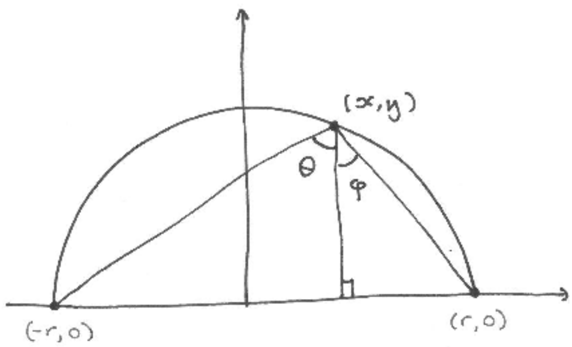
$$\begin{aligned}\cos(2^{-n-1}\pi) = 2\cos^2(2^{-n-2}\pi) - 1 &\implies 2\cos(2^{-n-2}\pi) = \sqrt{2+2\cos(2^{-n-1}\pi)} \\ &\implies b_{n+1} = \sqrt{2+b_n},\end{aligned}$$

eftersom $-\pi/2 \le 2^{-n-2}\pi \le \pi/2$, så $(b_n)_n$ lyder samma regler som definierar $(a_n)_n$ och därmed är $a_n = b_n$ för alla $n \in \mathbf{Z}$.

Eftersom cosinus är uppåtbegränsad och avtagande på intervallet $[0, \pi]$ är $(b_n)_n$ växande och uppåtbegränsad. Därför är även $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ växande och uppåtbegränsad.

---

7. Betrakta en punkt (x, y) i planet som ligger på en cirkel med radien $r > 0$ och medel punkt i origo. Det innebär då att $x^2 + y^2 = r^2$. Låt $y > 0$, och θ och φ vara vinklarna i bilden nedan. Visa att $\cos(\theta + \varphi) = 0$ för alla (x, y).



Solution: Vi kan direkt se att

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2+(x+r)^2}}, \quad \sin\theta = \frac{x+r}{\sqrt{y^2+(x+r)^2}},$$
$$\cos\varphi = \frac{y}{\sqrt{y^2+(r-x)^2}} \quad \text{och} \quad \sin\varphi = \frac{r-x}{\sqrt{y^2+(r-x)^2}}.$$

Därför kan vi räkna

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\varphi) &= \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ &= \frac{y}{\sqrt{y^2+(x+r)^2}}\frac{y}{\sqrt{y^2+(r-x)^2}} - \frac{x+r}{\sqrt{y^2+(x+r)^2}}\frac{r-x}{\sqrt{y^2+(r-x)^2}} \\ &= \frac{y^2-(x+r)(r-x)}{\sqrt{y^2+(x+r)^2}\sqrt{y^2+(r-x)^2}} = \frac{y^2+x^2-r^2}{\sqrt{y^2+(x+r)^2}\sqrt{y^2+(r-x)^2}} = 0\end{aligned}$$
