Inledande matematisk analys

1.

En pythagoreisk trippel är tre positiva heltal x, y och z som uppfyller ekvationen $x^2 + y^2 = z^2$. Visa att minst ett tal i en pythagoreisk trippel måste vara jämnt.

Solution:

Vi ger ett motsägelsebevis: Vi antar att alla x, y och z är udda, så vi kan skriva

$$x = 2n+1, \quad y = 2m+1 \quad \text{och} \quad z = 2\ell + 1$$

för hela tal n, m och ℓ. Substitution i ekvationen $0 = x^2 + y^2 - z^2$ ger att

$$0 = (2n+1)^2 + (2m+1)^2 - (2\ell+1)^2 = 2(2n^2 + n + 2m^2 + m - 2\ell - \ell) + 1$$

så vi kan dra slutsatsen att 0 är ett udda tal. Eftersom det är falskt vet vi att alla x, y och z inte kan vara udda.

2.

(a) Visa att

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{j+1} - a_j) = a_{n+1} - a_1$$

för givna tal $a_1, \ldots, a_{N+1}$ och positivt heltal n.

(b) Använd formler och regler för summor du känner till för att visa

$$\sum_{j=1}^{n} \left((j+1)^3 - j^3\right) = 3\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

för alla positiva heltal n.

(c) Använd både (a) och (b) för att visa

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

för alla positiva heltal n.

Solution:

(a) Vi ger ett induktionsbevis av

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{j+1} - a_j) = a_{n+1} - a_1 \tag{1}$$

Vi kan kontrollera direkt att

$$\sum_{j=1}^{1} (a_{j+1} - a_j) = a_{1+1} - a_1$$

så (1) stämmer för $n = 1$. Nu antar vi att (1) stämmer för $n = m$ där m är något givet positivt heltal. Vi betrakta

$$\sum_{j=1}^{m+1}(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=1}^{m}(a_{j+1} - a_j) + (a_{m+2} - a_{m+1})$$
$$= (a_{m+1} - a_1) + (a_{m+2} - a_{m+1}) = a_{m+2} - a_1$$

så (1) med $n = m$ medför (1) med $n = m + 1$. Enligt induktionsprincipen är (1) bevisat för alla positiva tal n.

(b) Vi räknar

$$\sum_{j=1}^{n}\big((j+1)^3 - j^3\big) = \sum_{j=1}^{n}\big((j^3 + 3j^2 + 3j + 1) - j^3\big)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\big(3j^2 + 3j + 1\big) = \sum_{j=1}^{n} 3j^2 + \sum_{j=1}^{n} 3j + \sum_{j=1}^{n} 1$$
$$= 3\sum_{j=1}^{n} j^2 + 3\sum_{j=1}^{n} j + n = 3\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

(c) Enligt (a) med $a_j = j^3$ är

$$\sum_{j=1}^{n}\big((j+1)^3 - j^3\big) = (n+1)^3 - 1$$

så (b) medför att

$$3\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1.$$

Därifrån ser vi att

$$3\sum_{j=1}^{n} j^2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

och därför är

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

3.

Avgör med bevis vilka $x \in \mathbf{R}$ lyder olikheten

$$x^2 - 4x + 4 \leq 5x - 10.$$

Solution:

Vi räknar

$$x^2 - 4x + 4 \le 5x - 10 \iff x^2 - 9x + 14 \le 0 \iff$$
$$(x-2)(x-7) \le 0 \iff x \ge 2 \text{ och } x \le 7.$$

Därför $x \in \mathbf{R}$ lyder olikheten $x^2 - 4x + 4 \le 5x - 10$ om och endast om $2 \le x \le 7$.

4.

Använd räkneregler och olikheter för exponentialfunktionen för visa

$$1 \le \frac{\exp(h) - 1}{h} \le \frac{1}{1-h}$$

för $0 < h < 1$.

Solution: Vi kan använda olikhet 2 i sats F.4 för att visa

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} \ge \frac{1 + h - 1}{h} = 1$$

eftersom $h > 0$. Och även olikhet 4 i sats F.4 för att visa

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} \le \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h} = \frac{\left(\frac{1-(1-h)}{1-h} - 1\right)}{h} = \frac{1}{1-h}$$

eftersom $0 < h < 1$.

5.

(a) Använd likheten

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \quad (\theta, \varphi \in \mathbf{R})$$

och trigonometriska ettan för att visa

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Hitta alla $\theta \in \mathbf{R}$ sådana att $1 + \cos(2\theta) + 3\sin\theta = 0$.

Solution:

(a)

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

därför är

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Vi räknar

$$0 = 1 + \cos(2\theta) + 3\sin\theta = 1 + (1 - 2\sin^2\theta) + 3\sin\theta = -2\sin^2\theta + 3\sin\theta + 2$$

så ekvationen är ekvivalent med

$$0 = 2(\sin^2\theta - 3/2\sin\theta - 1) = 2((\sin\theta - 3/4)^2 - 9/16 - 1) = 2((\sin\theta - 3/4)^2 - 25/16)$$

som i sin tur är ekvivalent med

$$\sin\theta = 3/4 \pm 5/4.$$

Så antingen är $\sin\theta = 2$ eller $\sin\theta = -1/2$. Eftersom det finns inga lösningar till $\sin\theta = 2$ alla lösningar till ekvationen är precis lösningarna till $\sin\theta = -1/2$. Därför lösningarna är

$$\theta = -5\pi/6 + 2k\pi, -\pi/6 + 2k\pi$$

för alla $k \in \mathbf{Z}$.

6.

Avgör med bevis om funktionen $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln

$$g(x) = 4e^x - e^{-x}$$

är inverterbar eller inte.

Solution:

Vi räknar

$$\begin{aligned}
&y = 4e^x - e^{-x}\\
&\iff 0 = 4e^{2x} - ye^x - 1\\
&\iff 0 = \left(2e^x - \frac{y}{4}\right)^2 - 1 - \frac{y^2}{16}\\
&\iff 1 + \frac{y^2}{16} = \left(2e^x - \frac{y}{4}\right)^2\\
&\iff \pm\sqrt{1 + \frac{y^2}{16}} = 2e^x - \frac{y}{4}\\
&\iff e^x = \frac{y}{8} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{y^2}{16}}.
\end{aligned}$$

Eftersom e^x är alltid positivt och $\sqrt{1 + \frac{y^2}{16}} > \frac{y}{4}$ är

$$e^x = \frac{y}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{y^2}{16}}$$

den ända möjligheten. Därför är $y = 4e^x - e^{-x}$ om och endast om

$$x = \ln\left(\frac{y}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{y^2}{16}}\right),$$

och därmed är g inverterbar.

7.

Kom ihåg att absolutbeloppet av ett reellt tal x är

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0; \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

(a) Definiera absolutbeloppet $|z|$ av ett komplext tal z och visa att den stämmer överens med definitionen för reella tal i fallet imaginärdelen av z är noll.

(b) Visa att $|zw| = |z||w|$ for alla komplexa tal z och w.

Solution:

(a) $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ där $z = x + iy$ för reella tal x och y. Om imaginärdelen av z är noll är $z = x$ och $|x| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2}$. I fallet $x \geq 0$ är $\sqrt{x^2} = x$ och om $x < 0$ är $\sqrt{x^2} = -x$, så det stämmer överens med definitionen för reella tal.

(b) Anta att $z = x + iy$ och $w = u + iv$ för $x, y, u, v \in \mathbf{R}$. Då är

$$zw = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

så

$$
\begin{aligned}
|zw|^2 &= (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2 \\
&= (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = |z|^2|w|^2
\end{aligned}
$$

som medför att $|zw| = |z||w|$ eftersom absolutbeloppet av ett tal är aldrig negativt.
