TATA79/TEN3 **Tentamen, 2018-08-21**

Inledande matematisk analys

1.

Utred med bevis vilket eller vilka av följande påståenden är sana:

(a) Om n delat med 7 har rest 3 då har n^2 delat med 7 rest 2;

(b) $(x+1)(x-3) < 0$ om $x > -1$;

(c) Om $(x-4)(x-8) \leq 0$ är $x \leq 9$.

Solution:

(a) Om n delat med 7 har rest 3 kan vi skriva $n = 7q + 3$ för något positivt heltal q. Därför är $n^2 = 49q^2 + 42q + 9 = 7(7q^2 + 6q + 1) + 2$, så n^2 delat med 7 har rest 2 och påståendet är sant;

(b) Om $x = 4$ är $(x+6)(x-2) = 10 \times 2 = 20 \not< 0$ trots att $x > -1$. Därför är påståendet falskt;

(c) Om $(x-4)(x-8) \leq 0$ måste $(x-4)$ och $(x-8)$ har olika tecken. Därför är $4 \leq x \leq 8$ och i synnerhet är $x \leq 9$ så påståendet är sant.

---

2. Bevisa att $4n \leq 2^n$ för alla heltal $n \geq 4$.

Solution:

Vi vill bevisa

$$4n \leq 2^n \tag{$(**)_n$}$$

för alla heltal $n \geq 4$.

Först kontrollerar vi fallet $(**)_4$, då räknar vi att $4n = 4 \times 4 = 16$ och $2^n = 2^4 = 16$. Eftersom $16 \leq 16$ är $(**)_4$ bevisat.

Nu antar vi att $(**)_m$ är sant för något heltal $m \geq 4$ och betraktar $(**)_{m+1}$. Vänsterledet är

$$4(m+1) = 4m + 4 \leq 2^m + 4 = 2^m + 2^2$$

enligt antagandet $(**)_m$. Eftersom $m \geq 2$ är

$$2^m + 2^2 \leq 2^m + 2^m = 2^m(1+1) = 2^{m+1}$$

som är högerledet i $(**)_{m+1}$. Därför är implikationen $(*)_m \implies (*)_{m+1}$ bevisat.

3.

(a) Visa att uttrycket

$$\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$$

(där $a, b \in \mathbf{R}$) inte beror på b.

(b) Visa att

$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

för alla $x, y \in \mathbf{R}$

Solution:

(a) Enligt (3.22) och (3.23) är

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} \\
&= \frac{(\sin a \cos b + \cos a \sin b) + (\sin a \cos b - \cos a \sin b)}{(\cos a \cos b - \sin a \sin b) + (\cos a \cos b + \sin a \sin b)} \\
&= \frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} = \tan a
\end{aligned}$$

som beror inte på b.

(b) Om vi tar $a = (x+y)/2$ och $b = (x-y)/2$ i likheten ovan får vi att

$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

---

4. Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{R}\setminus\{5\} \to M$, där $M \subseteq \mathbf{R}$, som är definierad enligt uttrycket

$$f(x) = \frac{6x-7}{x-5}.$$

(a) Utred vad mängden M måste vara så att f är bijektiv.

(b) Ge ett uttryck för $f^{-1}(x)$ som gäller för alla $x \in M$, där M är ditt svar till (a).

Solution:

(a) Vi räknar

$$y = f(x) = \frac{6x-7}{x-5} \underset{\substack{\uparrow \\ x \neq 5}}{\iff} y(x-5) = 6x-7 \iff x(y-6) = 5y-7 \underset{\substack{\uparrow \\ y \neq 6}}{\iff} x = \frac{5y-7}{y-6}.$$

Därifrån ser vi att $y = f(x)$ har en unik lösning $x \neq 5$ om och endast om $y \neq 6$. Därför är vi tvungna att välja $M = \mathbf{R} \setminus \{6\}$.

(b) Från räkningen ovan ser vi att

$$f^{-1}(x) = \frac{5x-7}{x-6}$$

för alla $x \in \mathbf{R} \setminus \{6\}$.

---

5. Anta att en funktion $g\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ uppfyller regeln

$$g(xy) = g(x) + g(y)$$

för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

(a) Bevisa att $g(x^n) = ng(x)$ för alla $x \in (0,\infty)$ och $n \in \mathbf{Z}_+$.

(b) Bevisa att $g(x^{1/m}) = g(x)/m$ för alla $x \in (0,\infty)$ och $m \in \mathbf{Z}_+$.

(c) Bevisa att $g(x^r) = rg(x)$ för alla $x \in (0,\infty)$ och positiva rationella tal r.

(d) Bevisa att $g(1) = 0$.

Solution:

(a) Vi kan ge ett induktionsbevis. Om $n = 1$ är $g(x^n) = g(x) = ng(x)$ så bassteget är bevisat. Nu antar vi att $g(x^k) = kg(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ och något $k \in \mathbf{Z}_+$ och räknar

$$g(x^{k+1}) = g(x^k x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enligt regeln}}}{=} g(x^k) + g(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enligt antagandet}}}{=} kg(x) + g(x) = (k+1)g(x)$$

så enligt induktionsprincipen är $g(x^n) = ng(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{Z}_+$.

(b) Vi använder del (a) med $y = \sqrt[m]{x}$ och $n = m$: Den säger $g((\sqrt[m]{x})^m) = mg(\sqrt[m]{x})$ och är ekvivalent med

$$\frac{g(x)}{m} = \frac{g((\sqrt[m]{x})^m)}{m} = g(\sqrt[m]{x}) = g(x^{1/m}).$$

(c) Vi skriver $r = n/m$ där $n, m \in \mathbf{Z}_+$ och använder både (a) och (b) för att dra slutsatsen

$$g(x^r) = g(x^{n/m}) = g(\sqrt[m]{x^n}) = \frac{g(x^n)}{m} = \frac{n}{m}\, g(x) = rg(x)$$

(d) Vi vet att $1^2 = 1$ så $g(1) = g(1^2) = g(1) + g(1)$. Därför är $g(1) = 0$.

6.

(a) Definiera vad det betyder att säga $\ell \in \mathbf{R}$ är en största undre begränsning till en icketom mängd $A \subseteq \mathbf{R}$.

(b) Bevisa att den största undre begränsningen till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är 6 där

$$b_n = \frac{6n^2 + 4n + 12}{n^2 + 2}$$

för varje positivt heltal n.

Solution:

(a) Det betyder att

(i) $\ell \leq a$ för alla $a \in A$, och

(ii) till varje $\varepsilon > 0$ finns det $a \in A$ så att $a < \ell + \varepsilon$.

(b) Först vill vi kolla att 6 är en undre begränsning av $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Eftersom $4n \geq 0$ och $n^2 + 2 > 0$ så är

$$b_n = \frac{6n^2 + 4n + 12}{n^2 + 2} = 6 + \frac{4n}{n^2 + 2} \geq 6$$

och därmed är 6 en undre begränsning till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Nu betraktar vi $\varepsilon > 0$ och räknar

$$\frac{4n}{n^2 + 2} \leq \frac{4n}{n^2} \leq \frac{4}{n}$$

så om vi välja $n > 4/\varepsilon$ då har vi hittat n så att $\frac{4n}{n^2+2} \leq \frac{4}{n} < \varepsilon$ och därför är $b_n = 6 + \frac{4n}{n^2+2} < 6 + \varepsilon$ för samma n.

Då har vi vissat att 6 är den minsta undre begränsningen till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

---

7. Betrakta funktionen $f \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definierad enligt formeln

$$f(z) = z^2$$

för alla $z \in \mathbf{C}$.

(a) Visa att om $x > 0$, $y > 0$ och $z = x + iy$ — det vill säga, z ligger i den första kvadranten — då är $\Im(f(z)) > 0$.

(b) Betrakta $w \in \mathbf{C}$ som uppfyller olikheten $\Im(w) > 0$. Visa att ekvationen $w = f(z)$ har en lösning z som ligger i den första kvadranten.

Solution:

(a) Om $x > 0$, $y > 0$ och $z = x + iy$ är

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Därför är $\Im(f(z)) = 2xy > 0$.

(b) Sätt $w = u + iv$ och $z = x + iy$ där $x, y, u, v \in \mathbf{R}$. Vi vill lösa ekvationen $u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi$ för positiva x och y. Real- och imaginärdelen av ekvationen är

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \quad \text{respektive} \\ v &= 2xy. \end{aligned}$$

Eftersom $|w| = |z|^2$ vet vi också att

$$\sqrt{u^2 + v^2} = x^2 + y^2.$$

Från första och sista likheten får vi att

$$2x^2 = u + \sqrt{u^2 + v^2}$$

samt

$$2y^2 = -u + \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Därför är kandidatorna för positiva x och y

$$x = \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}} \quad \text{och} \quad y = \sqrt{\frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}}.$$

Nu kan man kolla att de är positiva lösningar till $u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi$ eftersom $v = \Im(w) > 0$.
