TATA79/TEN3 **Tentamen, 2018-04-06**

Inledande matematisk analys

1.
Utred med bevis vilket eller vilka av följande påståenden är sana:

(a) Om $x \geq 7$ är $x(x-3) \geq 25$;

(b) Om $(x-2)(x-6) \leq 0$ är $x \leq 6$;

(c) $(x+6)(x-2) > 0$ om $x > -6$.

Solution:

(a) Om $x \geq 7$ är $x - 3 > 4$ så är $x(x-3) > 28 > 25$ och därför är påståendet sant;

(b) Om $(x-2)(x-6) \leq 0$ måste $(x-2)$ och $(x-6)$ har olika tecken. Därför är $2 \leq x \leq 6$ och i synnerhet är $x \leq 6$ så påståendet är sant;

(c) Om $x = -4$ är $(x+6)(x-2) = 2 \times (-6) = -12 \not> 0$ trots att $x > -6$. Därför är påståendet falskt.

---

2. Fibinacci talföljd $(F_n)_n$ definieras av villkoren

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n & \text{för } n \geq 1 \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

(a) Räckna ut F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 och F_6. Vilket eller vilka är jämnt delbart med 8?

(b) Visa att $F_{n+6} = 5F_n + 8F_{n+1}$ för alla $n \geq 1$.

(c) Visa att vart sjätte tal från och med talet F_6 är jämnt delbart med 8.

Solution:

(a) $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ och $F_6 = 8$. Bara F_6 är delbart med 8

(b) Från villkoren vet vi att

$$\begin{aligned} F_{n+6} &= F_{n+5} + F_{n+4} \\ &= (F_{n+4} + F_{n+3}) + F_{n+4} = 2F_{n+4} + F_{n+3} \\ &= 2(F_{n+3} + F_{n+2}) + (F_{n+2} + F_{n+1}) = 2F_{n+3} + 3F_{n+2} + F_{n+1} \\ &= 2(F_{n+2} + F_{n+1}) + 3(F_{n+1} + F_n) + F_{n+1} = 2F_{n+2} + 6F_{n+1} + 3F_n \\ &= 2(F_{n+1} + F_n) + 6F_{n+1} + 3F_n = 8F_{n+1} + 5F_n \end{aligned}$$

för alla $n \geq 1$.

(c) Vi ger en induktionsbevis. Vi vet att $F_6 = 8$ är jämnt delbart med 8. Nu antar vi att F_ℓ är jämnt delbart med 8 och betrakta $F_{\ell+6}$. Från (b) vet vi att $F_{\ell+6} = 8F_{\ell+1} + F_\ell$ och därför är $F_{\ell+8}$ jämnt delbart med 8 eftersom det är en summa av två tal som är delbara med 8: $8F_{\ell+1}$ är jämnt delbart med 8 (oavsett av värdet av $F_{\ell+1}$) och vi antog att F_ℓ var jämnt delbart med 8. Därför har vi bevisat att om F_ℓ är jämnt delbart med 8 så är $F_{\ell+8}$ jämnt delbart med 8 och enligt induktionsprincipen är F_{6k} delbara med 8 för varje heltal $k \geq 1$.

3.

(a) Visa att uttrycket
$$\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$$
(där $a, b \in \mathbf{R}$) inte beror på b.

(b) Visa att
$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$
för alla $x, y \in \mathbf{R}$

Solution:

(a) Enligt (**??**) och (**??**) är

$$\begin{aligned}&\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}\\ &= \frac{(\sin a\cos b + \cos a \sin b) + (\sin a \cos b - \cos a \sin b)}{(\cos a \cos b - \sin a \sin b) + (\cos a \cos b + \sin a \sin b)}\\ &= \frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} = \tan a\end{aligned}$$

som beror inte på b.

(b) Om vi tar $a = (x+y)/2$ och $b = (x-y)/2$ i likheten ovan får vi att
$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$
för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

---

4. Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{R}\backslash\{4\} \to M$, där $M \subseteq \mathbf{R}$, som är definierad enligt uttrycket
$$f(x) = \frac{6x-8}{x-4}.$$

(a) Utred vad mängden M måste vara så att f är bijektiv.

(b) Ge ett uttryck för $f^{-1}(y)$ som gäller för alla $y \in M$, där M är ditt svar till (a).

Solution:

(a) Vi räknar

$$y = f(x) = \frac{6x-8}{x-4} \underset{x \neq 4}{\overset{}{\iff}} y(x-4) = 6x-8 \iff x(y-6) = 4y-8 \iff x = \frac{4y-8}{y-6}$$

där sista ekvivalensen gäller om och endast om $y \neq 6$. Därifrån ser vi att $y = f(x)$ har en unik lösning $x \neq 4$ om och endast om $y \neq 6$. Därför välja vi $M = \mathbf{R} \setminus \{6\}$.

(b) Från räkningen ovan ser vi att

$$f^{-1}(y) = \frac{4y-8}{y-6}$$

för alla $y \in \mathbf{R} \setminus \{6\}$.

---

5. Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \leq |x|, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n > |x|, \end{cases}$$

för positiva heltal n och $x \in \mathbf{R}$.

(a) Definiera exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och talel e.

(b) Visa att

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) \leq \frac{1}{\exp_n(-x)}$$

om $n > |x|$.

(c) Använd (b) för att visa

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för alla $n \geq 3$.

Solution:

(a) $\exp(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \exp_n(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ och $e = \exp(1)$.

(b) Eftersom $\exp(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \exp_n(x)$ är $\exp(x)$ en över begränsning av $(\exp_n(x))_n$, så är

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) \tag{1}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{N}$.

Eftersom (1) gäller för alla $x \in \mathbf{R}$ kan vi sätta $-x$ in istället för x och får

$$\exp_n(-x) \leq \exp(-x) \implies \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp_n(-x)} \tag{2}$$

för $n > |x|$, eftersom i så fall är $\exp_n(x) > 0$.

Därför ger (1) och (2) att

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp_n(-x)}. \tag{3}$$

(c) Om vi sätter $x = 1$ och definitionen av $\exp_n$ in i första olikhet i (3) för vi att

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp_n(1) \leq \exp(1) = e$$

för $n \geq 2$. Om vi sätter $x = 1$ och definitionen av $\exp_n$ in i sista olikhet i (3) får vi att

$$e = \exp(1) \leq \frac{1}{\exp_n(-1)} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

för $n \geq 2$, så

$$e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för $n \geq 3$. Allihop då är

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för $n \geq 3$.

6.

(a) Definiera vad det betyder att säga $\ell \in \mathbf{R}$ är en största undre begränsning till en icketom mängd A.

(b) Bevisa att den största undre begränsningen till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är 2 där

$$b_n = \frac{2n^2 + 5n + 12}{n^2 + 6}$$

för varje positivt heltal n.

Solution:

(a) Det betyder att

(i) $\ell \leq a$ för alla $a \in A$, och

(ii) till varje $\varepsilon > 0$ finns det $a \in A$ så att $a < \ell + \varepsilon$.

(b) Först vill vi kolla att 2 är en undre begränsning av $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Eftersom $5n \geq 0$ och $n^2 + 6 > 0$ så är

$$b_n = \frac{2n^2 + 5n + 12}{n^2 + 6} = 2 + \frac{5n}{n^2 + 6} \geq 2$$

och därmed är 2 en undre begränsning till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Nu betraktar vi $\varepsilon > 0$ och räknar

$$\frac{5n}{n^2 + 6} \leq \frac{5n}{n^2} \leq \frac{5}{n}$$

så om vi välja $n > 5/\varepsilon$ då har vi hittat n så att $\frac{5n}{n^2+6} \leq \frac{5}{n} < \varepsilon$ och därför är $b_n = 2 + \frac{5n}{n^2+6} < 2 + \varepsilon$ för samma n.

Då har vi vissat att 2 är den minsta undre begränsningen till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

7. Betrakta funktionen $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definierad enligt formeln

$$f(z) = z^2$$

för alla $z \in \mathbf{C}$.

(a) Visa att om $x > 0$, $y > 0$ och $z = x + iy$ — det vill säga, z ligger i den första kvadranten — då är $\Im(f(z)) > 0$.

(b) Betrakta $w \in \mathbf{C}$ som uppfyller olikheten $\Im(w) > 0$. Visa att ekvationen $w = f(z)$ har en lösning z som ligger i den första kvadranten.

Solution:

(a) Om $x > 0$, $y > 0$ och $z = x + iy$ är

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Därför är $\Im(f(z)) = 2xy > 0$.

(b) Sätt $w = u + iv$ och $z = x + iy$ där $x, y, u, v \in \mathbf{R}$. Vi vill lösa ekvationen $u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi$ för positiva x och y. Real- och imaginärdelen av ekvationen är

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \quad \text{respektive} \\ v &= 2xy. \end{aligned}$$

Eftersom $|w| = |z|^2$ vet vi också att

$$\sqrt{u^2 + v^2} = x^2 + y^2.$$

Från första och sista likheten får vi att

$$2x^2 = u + \sqrt{u^2 + v^2}$$

samt

$$2y^2 = -u + \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Därför är kandidatorna för positiva x och y

$$x = \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}} \quad \text{och} \quad y = \sqrt{\frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}}.$$

Nu kan man kolla att de är positiva lösningar till $u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi$ eftersom $v = \Im(w) > 0$.