TATA79/TEN3 **Tentamen, 2017-08-15**

Inledande matematisk analys

1.

(a) Ge negationen av påståendet:

"Alla barn kan gråta."

(b) Utred med bevis om påståendet

$$"x < -4 \implies x^2 - x > 19"$$

är sant eller falskt.

(c) Skriv kontrapositionen av påståendet i (b). Är kontrapositionen sann eller falsk?

Solution:

(a) "Det finns minst ett barn som inte kan gråta."

(b) Påståendet är sant eftersom om $x < -4$ är $x^2 > 16$ och $-x > 4$. Det medförs att $x^2 - x > 16 + 4 = 20 > 19$, så $x^2 - x > 19$.

(c) "$x^2 - x \leq 19 \implies x \geq -4$". Kontrapositionen av ett sant påstående är alltid sann, därför är den sann.

---

2. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

för alla positiva heltal n.

Solution:

Vi bevisar

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \qquad (*)_n$$

med hjälp av induktion.

Först kollar vi att $(*)_1$ är sann:

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = 1(1+1)(1+2) = 3!$$

och

$$\frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{4!}{4} = 3!,$$

så $(*)_1$ är sann.

Nu antar vi att $(*)_\ell$ är sann för något ℓ och betraktar vänsterledet i $(*)_{\ell+1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\ell+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{\ell} k(k+1)(k+2) + (\ell+1)((\ell+1)+1)((\ell+1)+2) \\
&= \frac{\ell(\ell+1)(\ell+2)(\ell+3)}{4} + (\ell+1)(\ell+2)(\ell+3) \\
&= (\ell+1)(\ell+2)(\ell+3)\left(\frac{\ell}{4}+1\right) \\
&= \frac{(\ell+1)(\ell+2)(\ell+3)(\ell+4)}{4},
\end{aligned}$$

som är högerledet i $(*)_{\ell+1}$, så vi har visat $(*)_\ell \implies (*)_{\ell+1}$.

Enligt induktionsprincipen har vi bevisat $(*)_n$ för alla positiva heltal n.

3.

Fibinacci talföljd $(F_n)_n$ definieras av villkoren

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n & \text{för } n \geq 1 \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

(a) Räckna ut F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 och F_6. Vilka är jämna?

(b) Visa att $F_{n+3} = 2F_{n+1} + F_n$ för alla $n \geq 1$.

(c) Visa att vart tredje tal från och med talet F_3 är jämnt.

Solution:

(a) $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ och $F_6 = 8$. F_3 och F_6 är jämna?

(b) Från villkoren vet vi att $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \geq 1$ så vi får också att $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$ för $n \geq 1$. Därför kan vi skriva $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} = (F_{n+1} + F_n) + F_{n+1} = 2F_{n+1} + F_n$ för alla $n \geq 1$.

(c) Vi ger en induktionsbevis. Vi vet att $F_3 = 2$ är jämnt. Nu antar vi att F_ℓ är jämnt och betrakta $F_{\ell+3}$. Från (b) vet vi att $F_{\ell+3} = 2F_{\ell+1} + F_\ell$ och därför är $F_{\ell+3}$ jämnt eftersom det är en summa av två jämna tal: $2F_{\ell+1}$ är jämnt (oavsett av värdet av $F_{\ell+1}$) och vi antog att F_ℓ är jämnt. Därför har vi bevisat att om F_ℓ är så är $F_{\ell+3}$ jämnt och enligt induktionsprincipen är F_{3k} jämna för varje heltal $k \geq 1$.

4.

Hitta alla lösningar $\theta \in \mathbf{R}$ till ekvationen $2\cos(2\theta) - 4\cos\theta + 3 = 0$.

Solution:

Vi kan skriva om $2\cos(2\theta) - 4\cos\theta + 3 = 2(\cos(2\theta) + 1) - 4\cos\theta + 1 = 4(\cos\theta)^2 - 4\cos\theta + 1$ så ekvationen är ekvivalent med

$$0 = (\cos\theta)^2 - \cos\theta + \frac{1}{4} = \left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Lösningar är då alla θ som uppfyller $\cos\theta - 1/2 = 0$.

$$\cos\theta - 1/2 = 0 \iff \cos\theta = \frac{1}{2} \iff \theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Så alla lösningar är

$$\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

5.

Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \leq |x|, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n > |x|, \end{cases}$$

för positiva heltal n och $x \in \mathbf{R}$.

(a) Definiera exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och talel e.

(b) Visa att

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) \leq \frac{1}{\exp_n(-x)}$$

om $n > |x|$.

(c) Använd (b) för att visa

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för alla $n \geq 3$.

Solution:

(a) $\exp(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \exp_n(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ och $e = \exp(1)$.

(b) Eftersom $\exp(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \exp_n(x)$ är $\exp(x)$ en över begränsning av $(\exp_n(x))_n$, så är

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) \tag{1}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{N}$.

Eftersom (1) gäller för alla $x \in \mathbf{R}$ kan vi sätta $-x$ in istället för x och får

$$\exp_n(-x) \leq \exp(-x) \implies \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp_n(-x)} \tag{2}$$

för $n > |x|$, eftersom i så fall är $\exp_n(x) > 0$.

Därför ger (1) och (2) att

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp_n(-x)}. \tag{3}$$

(c) Om vi sätter $x = 1$ och definitionen av $\exp_n$ in i första olikhet i (3) får vi att

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp_n(1) \leq \exp(1) = e$$

för $n \geq 2$. Om vi sätter $x = 1$ och definitionen av $\exp_n$ in i sista olikhet i (3) får vi att

$$e = \exp(1) \leq \frac{1}{\exp_n(-1)} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

för $n \geq 2$, så

$$e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för $n \geq 3$. Allihop då är

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för $n \geq 3$.

6.

(a) Kom ihåg att $\exp(x) \leq 1/(1-x)$ för $x < 1$. Använd den tillsammans med andra räknareglar för att visa

$$\ln(a) \geq \frac{a-1}{a}$$

för alla $a > 0$.

(b) Skissa grafen av den naturliga logaritmfunktionen $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$.

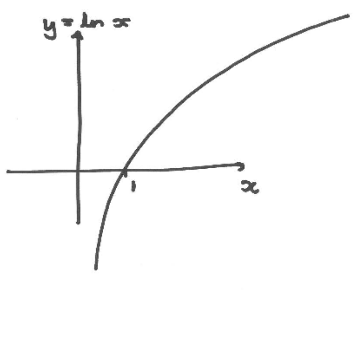
Solution:

(a) Vi vet att $\exp(x) \leq 1/(1-x)$ för $x < 1$ så vi får ta $x = \ln(a)$ så länge $a < e$. Vi får

$$a = \exp(\ln(a)) \leq \frac{1}{(1 - \ln(a))} \underset{\substack{\uparrow \\ 0 < a < e}}{\Longrightarrow} 1 - \ln(a) \leq \frac{1}{a} \Longrightarrow \ln(a) \geq \frac{a-1}{a}.$$

Om $a \geq e$ är $\ln(a) \geq 1$ och $(a-1)/a \leq 1$ så $\ln(a) \geq 1 \geq (a-1)/a$.

(b) Graphen av ln:



7.

(a) Hitta alla $w \in \mathbf{C}$ så att $w^2 = 5 + 12i$.

(b) Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ så att $z^2 + (4 + 2i)z - 2 - 8i = 0$.

Solution:

(a) Sätt $w = u + iv$ för $u, v \in \mathbf{R}$. Då är $u^2 - v^2 + 2uvi = (u + iv)^2 = 5 + 12i$ så

$$u^2 - v^2 = 5 \quad \text{och} \tag{4}$$

$$2uv = 12. \tag{5}$$

Men eftersom $|w|^2 = |5 + 12i|$ är

$$u^2 + v^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13. \tag{6}$$

Om vi adderar (4) och (6) får vi att $2u^2 = 18$ och om vi subtraherar (4) från (6) får vi att $2v^2 = 8$. Så

$$u = \pm 3 \quad \text{och} \quad v = \pm 2.$$

Ekvation (5) säger att u och v har samma tecken, så vi har bara två möljigheter: $u = 3$ och $v = 2$, eller $u = -3$ och $v = -2$. Därför är lösningar $w = 3 + 2i$ och $w = -3 - 2i$.

(b) Vi kan skriva om $z^2 + (4 + 2i)z - 2 - 8i = 0$ som $(z + (2 + i))^2 = 5 + 12i$ så enligt första delen av uppgiften är

$$z + (2 + i) = 3 + 2i \quad \text{eller} \quad z + (2 + i) = -3 - 2i.$$

Därför alla lösningar är $z = 1 + i$ och $z = -5 - 3i$.