Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) (a) Visa att om n^3 är jämnt där n är ett heltal då är n jämnt.
(b) Visa att $2^{\frac{1}{3}}$ är irrationellt.

(2) Med hjälp av dubbelvinkel formler och exakta värden för $\cos(\pi/4)$ och $\sin(\pi/4)$ räkna ut exakta värden av $\cos(\pi/8)$ och $\sin(\pi/8)$.

(3) Bevisa Bernoullis olikhet: För $x \geq -1$ och $n \in \mathbf{Z}_+$ är

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Påpecka steget i beviset där du använder dig av antagandet $x \geq -1$.

(4) Kom ihåg att $\exp(x) = \sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \exp_n(x)$ där

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n < |x|; \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n \geq |x|. \end{cases}$$

Använd Bernoullis olikhet för att visa

$$\exp(x) \geq 1 + x$$

och använd den tillsammans med räckneregler för exponentialfunktionen för att visa

$$\exp(x+h) > \exp(x)$$

för $x \in \mathbf{R}$ och $h > 0$.

(5) Identifiera medelpunkten och radien av cirkeln som ges av lösningarna $z \in \mathbf{C}$ till ekvationen

$$|z - 3| = \sqrt{2}|z|.$$

(6) Betrakta en funktion $f\colon (3,\infty) \to (0,\infty)$ definierad enligt uttrycket

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{x-3}}$$

för alla $x \in (3,\infty)$. Utred med bevis om f är inverterbar eller inte och i fallet den är inverterbar ge inversen.

(7) Betrakta funktionerna $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och $\cosh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formler

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$. Visa att

$$\cosh(2x) = (\cosh(x))^2 + (\sinh(x))^2 .$$