Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) (a) Skriv kontrapositionen av påståendet

”Om n är ett primtal och jämnt då är $n = 2$.”

(b) Skriv $7 = 7_{10}$ i det ternära talsystemet.

(2) Kom ihåg Pascals identitet: För positiva hela tal n och k så att $k \leq n-1$ har man att

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Betrakta ett godtyckligt positivt heltal n och $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ge ett induktionsbevis (där man använder induktion över k) av likheten

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} = (-1)^k \binom{n-1}{k}.$$

(3) Räknar ut resten av

$$p(x) := 1 + x + x^2 + \cdots + x^{57} = \sum_{k=0}^{57} x^k$$

delat med $q(x) := x(x+1)$.

(4) Betrakta en funktion $f\colon (3, \infty) \to (0, \infty)$ definierad enligt uttrycket

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{x-3}}$$

för alla $x \in (3, \infty)$. Utred med bevis om f är inverterbar eller inte och i fallet den är inverterbar ge inversen.

(5) Visa att

$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

Du får använda andra trigonometriska likheter vi har sett under kursens gång utan bevis så länge du anger de tydligt i din lösning.

(6) Betrakta funktionerna $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och $\cosh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formler

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$. Visa att

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x).$$

(7) (a) För ett komplext tal z definiera *absolutbeloppet* $|z|$ och *konjugatet* $\overline{z}$.

(b) Lös ekvationen $z + 3\overline{z} = 8 + 10i$.