Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) Ange och bevisa Pythagoras sats.

(2) Bevisa Bernoullis olikhet: För alla reella tal $x \geq -1$ och alla $n \in \mathbf{Z}_+$ får man att

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(3) Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \leq |x|, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n > |x|, \end{cases}$$

för positiva heltal n och $x \in \mathbf{R}$.

(a) Definiera exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(b) Använd Bernoullis olikhet samt definitionen av exponentialfunktionen för att visa

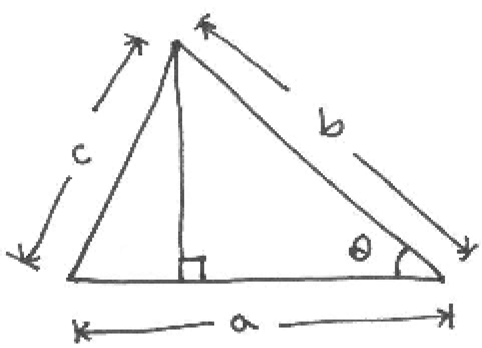
$$\exp(x) \geq 1 + x$$

för alla $x \in \mathbf{R}$.

(4) Betrakta en triangel med sidlängdorna a, b och c och en vinkel θ mittemot sidan av längden c enligt figuren nedan. Använd Pythagoras sats samt trigonometriska ettan för att bevisa

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

Likheten kallas för *cosinussatsen*.



(5) (a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Låt $b > 1$ och definiera funktionen $f\colon \mathbf{R} \to (0, \infty)$ enligt formeln $f(x) = b^x$. Visa med hjälp av egenskaper hos exponentialfunktionen och den naturliga logaritmfunktionen att funktionen f är bijektiv och ge en formel för dess inversa funktionen f^{-1}.

(6) (a) Hitta alla $w \in \mathbf{C}$ så att $w^2 = 5 + 12i$. [Tips: $5^2 + 12^2 = 13^2$]

(b) Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ så att $z^2 + (4 + 2i)z - 2 - 8i = 0$.

(7) Vi vet att

$$\text{"}n^2 \text{ är jämnt delbart med 3"} \implies \text{"}n \text{ är jämnt delbart med 3"} \qquad (\dagger)$$

eftersom vi bevisade kontrapositionen i dugga 1. Använd (†) för att visa lösningar x till $x^2 = 3$ är irrationella.