Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

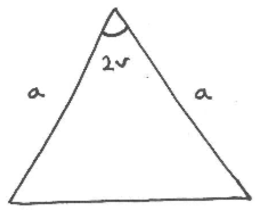
(1) Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{R}\setminus\{7\} \to M$, där $M \subseteq \mathbf{R}$, som är definierad enligt uttrycket

$$f(x) = \frac{4x-3}{x-7}.$$

(a) Utred vad mängden M måste vara så att f är bijektiv.

(b) Ge ett uttryck för $f^{-1}(y)$ som gäller för alla $y \in M$, där M är ditt svar till (a).

(2) Betrakta den likbenta triangeln i figuren nedan med två sidor av längden a och vinkeln i mellan lika med $2v$.



(a) Visa att triangelns höjd är $a\cos v$ och den tredje sidan har längden $2a\sin v$.

(b) Räkna ut höjden av triangeln om den först roteras så att en sida med längden a blir basen.

(c) Hitta två uttryck för triangelns area och därifrån bevisa att

$$\sin(2v) = 2\sin v\cos v$$

för $0 < v < \pi/4$.

(3) Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ som uppfyller regeln

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{$*$}$$

för alla $x, y \in \mathbf{Q}$, samt likheten

$$f(1) = \pi. \tag{$**$}$$

Använd bara $(*)$ och $(**)$ för att visa:

(a) $f(0) = 1$ [Tips: $0 + 1 = 1$];

(b) Visa med induktion (över n) att $f(nx) = f(x)^n$ för alla $x \in \mathbf{Q}$ och alla positiva heltal n.

(4) Hitta alla lösningar $\theta \in \mathbf{R}$ till ekvationen $2 - \cos(2\theta) - 3\sin\theta = 0$.

(5) (a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Låt $b > 1$ och definiera funktionen $f\colon \mathbf{R} \to (0, \infty)$ enligt formeln $f(x) = b^x$. Visa med hjälp av egenskaper hos exponentialfunktionen och den naturliga logaritmfunktionen att funktionen f är bijektiv och ge en formel för den inversa funktionen f^{-1}.

(6) (a) Hitta alla $w \in \mathbf{C}$ så att $w^2 = 8 + 6i$.

(b) Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ så att $z^2 + (2 + 4i)z - 11 - 2i = 0$.

(7) Vi vet att

$$\text{"}n^2 \text{ är jämnt delbart med 3"} \implies \text{"}n \text{ är jämnt delbart med 3"} \tag{$\dagger$}$$

eftersom vi bevisade kontrapositionen i Dugga 1. Använd $(\dagger)$ för att visa lösningar x till $x^2 = 3$ är irrationella.