Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns fem uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) Ge ett motsägelsebevis av följande påståendet.

”Om $n^3 + 5$ är udda för något heltal n då är n jämnt.”

(2) Beräkna summan

$$\sum_{k=1}^{35}\left(3k + \frac{3 \times 2^k \times 6^k}{3^k}\right).$$

Potenser av 4 får stå kvar i ditt svar.

(3) I varje fall nedan avgör med bevis om följden $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ är aritmetisk, geometrisk, både aritmetisk och geometrisk, eller varken aritmetisk eller geometrisk:

(a) $a_n = \frac{2^n}{3^{n+2}}$ för $n \in \mathbf{Z}_+$;

(b) $a_n = \frac{2n+n^2}{5n}$ för $n \in \mathbf{Z}_+$; och

(c) $a_n = 1$ för $n \in \mathbf{Z}_+$.

(4) Vilka av följande definitioner är definitionen att $\ell \in \mathbf{R}$ är den minsta övre begränsningen av en följd $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

(a) $a_n \geq \ell$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, och för varje $\varepsilon > 0$ och $n \in \mathbf{Z}_+$ är $\ell - \varepsilon < a_n$.

(b) $a_n \leq \ell$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, och för varje $\varepsilon > 0$ finns det minst ett $n \in \mathbf{Z}_+$ så att $\ell - \varepsilon < a_n$.

(c) $a_n \leq \ell$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, och för varje $n \in \mathbf{Z}_+$ finns det minst ett $\varepsilon > 0$ så att $\ell - \varepsilon < a_n$.

Med hjälp av den korrekta definitionen bevisa att

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \frac{3n^2 - 4n}{2n^2} = \frac{3}{2}.$$

(5) Kom ihåg att

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

för hela tal n och k där $0 \leq k \leq n$. Visa att

$$\sum_{n=2}^{m} \binom{n}{2} = \binom{m+1}{3}$$

för varje heltal $m \geq 2$.