Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns fem uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) Marcel Riesz är matematiker och har bett sin doktorand Lars Hörmander att betrakta följande systemet av likheter:

$$\begin{cases} x(2x+7) = 39 & \text{och} \\ x(2x-7) = -3. \end{cases}$$

Lars har skrivit följande argument i sitt anteckningsbok:

$$\left.\begin{array}{l} x(2x+7) = 39 \quad \text{och} \\ x(2x-7) = -3 \end{array}\right\} \implies x(2x+7) + x(2x-7) = 39 - 3$$
$$\implies 4x^2 = 36 \implies x = -3 \text{ eller } x = 3.$$

(a) Skriv negationen av påståendet ”$x(2x+7) = 39$ och $x(2x-7) = -3$”.

(b) I följande mötet skrev Marcel om systemet till det ekvivalenta systemet:

$$\left.\begin{array}{l} (2x+13)(x-3) = 0 \quad \text{och} \\ (2x-1)(x-3) = 0. \end{array}\right\}$$

(i) Hitta alla lösningar x till Marcels system.

(ii) Är ditt svar på (i) motsägelsefult med vad Lars skrev eller inte? Motivera ditt svar.

(2) Betrakta funktionen $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definierad enligt formeln

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x} & \text{om } 0 \le x < 9 \\ 3x - 24 & \text{om } x \ge 9 \end{cases}$$

(a) Rita grafen av f.

(b) Utred med bevis om f är inverterbar eller inte.

(3) Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

och använd den för att räkna ut

$$\sum_{k=1}^{100} (4k+3).$$

(4) (a) Låt I vara ett intervall. Definiera begreppen *växande* och *strängt växande* som kan gälla en funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$.

(b) Ange utan bevis vilken eller vilka av följande funktioner $g_i\colon [0,10] \to \mathbf{R}$ ($i = 1,2,3$) är växande.

(i) $g_1(x) = \begin{cases} x-5 & \text{om } 0 \le x < 5; \\ 4+x^2 & \text{om } 5 \le x \le 10. \end{cases}$

(ii) $g_2(x) = (x-5)^3$ för $x \in [0,10]$.

(iii) $g_3(x) = \begin{cases} x-5 & \text{om } 0 \le x < 5; \\ x^2-30 & \text{om } 5 \le x \le 10. \end{cases}$

(5) (a) Definiera vad det betyder att säga $u \in \mathbf{R}$ är en minsta övre begränsning till en icketom mängd $A \subset \mathbf{R}$.

(b) Bevisa att den minsta övre begränsning till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är $1/2$ där

$$b_n = \frac{n-4}{2n}$$

för varje positivt heltal n.