Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns fem uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) Marcel Riesz är matematiker och har bett sin doktorand Lars Hörmander att betrakta följande systemet av likheter:

$$\begin{cases} x(2x+7) = 39 \quad \text{och} \\ x(2x-7) = -3. \end{cases}$$

Lars har skrivit följande argument i sitt anteckningsbok:

$$\left.\begin{array}{l} x(2x+7) = 39 \quad \text{och} \\ x(2x-7) = -3 \end{array}\right\} \implies x(2x+7) + x(2x-7) = 39 - 3$$
$$\implies 4x^2 = 36 \implies x = -3 \text{ eller } x = 3.$$

(a) Skriv kontrapositionen av påståendet ”Om $x(2x+7) = 39$ och $x(2x-7) = -3$ är $x = -3$ eller $x = 3$”.

(b) Marcel säger att Lars argument visar att systemet har två lösningar men Lars säger att det inte räcker. Vem har rätt?

(c) Vilka eller vilken av implikationerna i Lars argument ovan kan inte förstärkas till en ekvivalens?

(2) Betrakta funktionen $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definierad enligt formeln

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x & \text{if } 0 \le x < 5 \\ 2x - 5 & \text{if } x \ge 5 \end{cases}$$

(a) Rita grafen av f.

(b) Utred med bevis om f är inverterbar eller inte.

(3) Betrakta summan

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{2-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

(a) Skriv om summan S_n till en summa som innehåller högst två termer.

(b) Bevisa att

$$S_n \le 2$$

för alla heltal $n \ge 1$.

(4) (a) Låt I vara ett intervall. Definiera begreppen *avtagande* och *strängt avtagande* som kan gälla en funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$.

(b) Antag att $f\colon I \to \mathbf{R}$ och $g\colon I \to \mathbf{R}$ är strängt avtagande. Avgör vilka eller vilket av följande slutsatser man kan dra:

(i) $f + g$ är strängt avtagande;

(ii) fg är strängt avtagande.

Motivera ditt svar med ett bevis i varje fall.

(5) (a) Definiera vad det betyder att säga $\ell \in \mathbf{R}$ är en största undre begränsning till en icketom mängd A.

(b) Bevisa att den största undre begränsning till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är $1/3$ där

$$b_n = \frac{n+11}{3n}$$

för varje positivt heltal n.