Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns fem uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) (a) Definiera a^n för $a \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{N}$, och a^{-n} för $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ och $n \in \mathbf{N}$.

(b) Bevisa att $(ab)^n = a^n b^n$ för $a, b \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{N}$.

(c) Skriva $0.325325325\ldots$ (det vill säger $a_{3k-2} = 3$, $a_{3k-1} = 2$ och $a_{3k} = 5$ för $k \in \mathbf{N}$) som ett bråk.

(2) (a) Definiera vad det betyder att säga ℓ är en infimum till en mängd A.

(b) Betrakta följderna $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ som definieras enligt

$$a_n = \frac{n+3}{n} \quad \text{och} \quad b_n = -\frac{3}{n}$$

för alla $n \in \mathbf{N}$.

(i) Bevisa att $\inf_n a_n = 1$.

(ii) Bevisa att $\inf_n b_n = -3$.

(3) Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - k) = n^2(n+1).$$

(4) (a) Definiera begreppet *strängt växande* som gäller för en funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(b) Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formeln

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

för alla $x \in \mathbf{R}$. Visa att f är strängt växande. [Tips: Faktorisera polynomet.]

(5) (a) Räkna summan

$$\sum_{k=1}^{8} 5(6)^k.$$

(b) Räkna summan

$$\sum_{k=1}^{42} \frac{7}{2^{k-1}}.$$

Här behöver du inte räkna ut potenser, det räcker att skriva om summan så att det har högst två termer som innehåller eventuella potenser.