

Inledande matematisk analys

1. Kom ihåg axiomen vi har antagit i kursen hittills:

I De algebraiska axiomen:

- (a) $a + b = b + a$ och $ab = ba$ för alla reella tal a och b (kommutativa lagarna);
- (b) $(a + b) + c = a + (b + c)$ och $(ab)c = a(bc)$ (associativa lagarna);
- (c) $a(b + c) = ab + ac$ för alla reella tal a , b och c (distributiva lagen);
- (d) Det finns två olika tal 0 och 1 så att $a + 0 = a$ och $a \times 1 = a$ för alla reella tal a (existens av neutrala element);
- (e) Till varje $a \neq 0$ finns det inversa element $-a$ och a^{-1} så att $a + (-a) = 0$ och $a \times a^{-1} = 1$ (existens av invers).

II Ordningens axiom:

- (a) För godtyckliga a och b gäller en och endast en av möjligheterna $a < b$, $a = b$ och $a > b$ (trikotomi);
- (b) $a < b$ och $b < c$ medför att $a < c$ (transitiva lagen);
- (c) $a < b$ medför att $a + c < b + c$ för alla reella tal c ;
- (d) $a < b$ och $0 < c$ medför att $ac < bc$.

Betrakta ett reellt tal a . Använda axiomen för att bevisa att det finns högst ett tal $b \in \mathbf{R}$ så att $a + b = 0$.

Solution:

Enligt I(e) finns det $-a \in \mathbf{R}$ så att $a + (-a) = 0$. Anta att det finns två reella tal b_1 och b_2 så att $a + b_1 = 0$ och $a + b_2 = 0$. Då

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1 + 0 = b_1 + (a + (-a)) = (b_1 + a) + (-a) = (a + b_1) + (-a) \\ &\stackrel{\uparrow \text{I(d)}}{=} 0 + (-a) = (a + b_2) + (-a) = (b_2 + a) + (-a) = b_2 + (a + (-a)) \\ &\stackrel{\uparrow \text{I(a)}}{=} b_2 + 0 = b_2. \end{aligned}$$

2.

- (a) Definiera vad det betyder att säga ℓ är en infimum till en mängd A .
- (b) Betrakta följderna $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ som definieras enligt

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{och} \quad b_n = \frac{n-1}{n}$$

för alla $n \in \mathbf{N}$.

- (i) Bevisa att $\inf_n a_n = 0$.
- (ii) Bevisa att $\inf_n b_n = 0$.

Solution:

- (a) Det betyder att
 - (i) $\ell \leq a$ för alla $a \in A$, och
 - (ii) för varje $\varepsilon > 0$ finns det $a \in A$ så att $a < \ell + \varepsilon$.
- (b) (i) i. Ett positivt tal delat med ett annat är positivt så $0 < 1/n$ och i synnerhet är $0 \leq 1/n = a_n$ för alla $n \in \mathbf{N}$.
ii. Betrakta $\varepsilon > 0$. Om vi tar n lika med ett naturligt tal större än $1/\varepsilon$ då är $1/\varepsilon < n$ och därför $a_n = 1/n < 0 + \varepsilon$ för detta val av n .
- (ii) i. Ett icke-negativt tal delat med ett positivt tal är icke-negativt så $0 \leq (n-1)/n$ och i synnerhet är $0 \leq (n-1)/n = b_n$ för alla $n \in \mathbf{N}$.
ii. Betrakta $\varepsilon > 0$. Vi har att

$$b_1 = \frac{1-1}{1} = 0 < 0 + \varepsilon.$$

Så för vilket $\varepsilon > 0$ som helst är b_1 så att $b_1 < 0 + \varepsilon$.

- 3.** Bevisa att

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2.$$

Solution:

Det finns ju flera sätt att bevisa formeln. Ett sätt är med induktion.

Om $n = 0$ är vänsterledet $\sum_{k=0}^0 (2k+1) = 1$ och högerledet är $(0+1)^2 = 1$ så likheten stämmer då.

Nu antar vi att likheten stämmer för $n = m$ och vi betraktar likheten då $n = m + 1$. Vi får att

$$\sum_{k=0}^{m+1} (2k+1) = \sum_{k=0}^m (2k+1) + (2(m+1)+1) = (m+1)^2 + 2(m+1) + 1 = ((m+1)+1)^2,$$

så vi kan dra slutsatsen att likheten stämmer om $n = m + 1$. Därför enligt induktion gäller likheten för alla $n \in \mathbf{N}$.

4.

(a) Definiera begreppet *växande* som gäller för en funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

(b) Betrakta en funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ som definieras enligt formeln

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{om } x \neq 0, \\ 0 & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

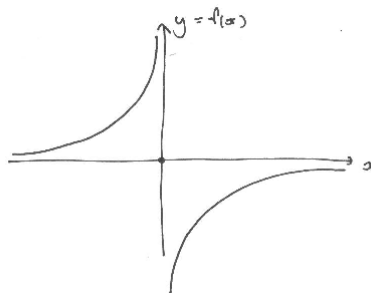
(i) Skissa grafen av f .

(ii) Visa att f är inte växande.

Solution:

(a) En funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ kallas för *växande* om $x < y$ medför att $f(x) \leq f(y)$ för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

(b) (i) Grafen av f ser ut lite så här:



(ii) För att visa att f inte är växande måste vi hitta två tal x och y så att $x < y$ men $f(x) > f(y)$. Det räcker att ta $x = -1$ och $y = 1$: Då är $f(-1) = 1 > -1 = f(1)$, så f är inte växande. (It is however, increasing on $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$ separately.)

5.

(a) Bevisa att

$$\sum_{k=1}^n ar^{k-1} = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

för $a, r \in \mathbf{R}$ så att $r \neq 1$.

(b) Räkna summan

$$\sum_{k=1}^{27} 4(-1)^k.$$

Solution:

(a) Det finns flera metoder. Till exempel sätt

$$S_n = \sum_{k=1}^n ar^{k-1}$$

Då är $S_{n+1} = S_n + ar^n$ och

$$S_{n+1} = a + r \sum_{k=1}^{n-1} ar^{k-1} = a + rS_n.$$

Därför

$$S_n + ar^n = a + rS_n$$

som medför att

$$S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}.$$

(b) Vi använder formen i (a) med $n = 27$, $r = -1$ och $a = -4$, så

$$\sum_{k=1}^{27} 4(-1)^k = \sum_{k=1}^{27} -4(-1)^{k-1} = -4 \frac{1 - (-1)^{27}}{1 - (-1)} = -4.$$