Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera injänade bonuspoäng till sin skringningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiga 9. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) Låt $a, b \in \mathbf{R}$ och $\alpha > 1$ vara konstanter.

(a) Visa att ett $z \in \mathbf{C}$ lyder

$$|z - a - ib| = \alpha|z|$$

om och endast om

$$\left(x + \frac{a}{\alpha^2 - 1}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{\alpha^2 - 1}\right)^2 = \frac{\alpha^2\left(a^2 + b^2\right)}{(\alpha^2 - 1)^2}$$

där $z = x + iy$ för $x, y \in \mathbf{R}$.

(b) Beskriv geometriskt mängden av alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $|z - a - ib| = \alpha|z|$.

(2) Betrakta talen

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{och} \quad b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

(a) Verifiera att både $x = a$ och $x = b$ är lösningar till ekvationen

$$1 + x = x^2.$$

(b) Fibbonaccis talföljd $(F_n)_n$ är en föjld som är definierad rekursivt enligt

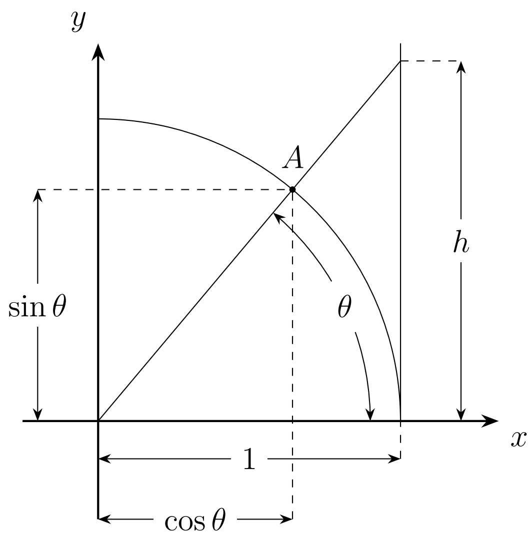
$$\begin{aligned} &F_1 = 1, \\ &F_2 = 1 \quad \text{och} \\ &F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{för } n > 2. \end{aligned}$$

Visa att

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

(3) Nedan finns en bild av en punkt A med koordinaterna $(\cos\theta, \sin\theta)$ där $\theta \in [0, \pi/2]$ och en del av enhetscirkeln med medelpunkt i origo.



(a) Vad är h uttryckt i θ? Motivera ditt svar.

(b) Med stöd från bilden bevisa olikheterna

$$\sin\theta \leq \theta \leq \tan\theta$$

för $\theta \in [0, \pi/2]$.

(4) Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n < |x|, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n \geq |x|, \end{cases}$$

för positiva heltal n och $x \in \mathbf{R}$.

(a) Definiera exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och talel e.

(b) Visa att

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) \leq \frac{1}{\exp_n(-x)}$$

om $n > |x|$.

(c) Använd (b) för att visa

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för alla $n \geq 3$.

(5) I föregående tentan (2020-03-19) räknade vi att

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

Med hjälp av det räkna ut exakta värden av $\cos(\pi/32)$ och $\sin(\pi/32)$.

(6) Använd trigonometriska likheterna

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\varphi) &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi,\\ \sin(\theta+\varphi) &= \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi\end{aligned}$$

och

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$(\theta, \varphi \in \mathbf{R})$ för att visa

$$\cos^3\theta = \frac{\cos(3\theta) + 3\cos\theta}{4}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(7) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x+7}\right) - \ln(x+3) \qquad (\diamondsuit)$$

definierat? Skriva om $(\diamondsuit)$ så att det inhåller högst en logaritm. För vilka $x \in \mathbf{R}$ är din omskrivning definierad?