Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) En pythagoreisk trippel är tre positiva heltal x, y och z som uppfyller ekvationen $x^2 + y^2 = z^2$. Visa att minst ett tal i en pythagoreisk trippel måste vara jämnt.

(2) (a) Visa att

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{j+1} - a_j) = a_{n+1} - a_1$$

för givna tal $a_1, \ldots, a_{N+1}$ och positivt heltal n.

(b) Använd formler och regler för summor du känner till för att visa

$$\sum_{j=1}^{n}\left((j+1)^3 - j^3\right) = 3\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

för alla positiva heltal n.

(c) Använd både (a) och (b) för att visa

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

för alla positiva heltal n.

(3) Avgör med bevis vilka $x \in \mathbf{R}$ lyder olikheten

$$x^2 - 4x + 4 \leq 5x - 10.$$

(4) Använd räkneregler och olikheter för exponentialfunktionen för visa

$$1 \leq \frac{\exp(h) - 1}{h} \leq \frac{1}{1-h}$$

för $0 < h < 1$.

(5) (a) Använd likheten

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \quad (\theta, \varphi \in \mathbf{R})$$

och trigonometriska ettan för att visa

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Hitta alla $\theta \in \mathbf{R}$ sådana att $1 + \cos(2\theta) + 3\sin\theta = 0$.

(6) Avgör med bevis om funktionen $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln

$$g(x) = 4e^x - e^{-x}$$

är inverterbar eller inte.

(7) Kom ihåg att absolutbeloppet av ett reellt tal x är

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0; \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

(a) Definiera absolutbeloppet $|z|$ av ett komplext tal z och visa att den stämmer överens med definitionen för reella tal i fallet imaginärdelen av z är noll.

(b) Visa att $|zw| = |z||w|$ for alla komplexa tal z och w.