Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) Utred med bevis vilket eller vilka av följande påståenden är sana:

(a) Om n delat med 7 har rest 3 då har n^2 delat med 7 rest 2;

(b) $(x+1)(x-3) < 0$ om $x > -1$;

(c) Om $(x-4)(x-8) \leq 0$ är $x \leq 9$.

(2) Bevisa att $4n \leq 2^n$ för alla heltal $n \geq 4$.

(3) (a) Visa att uttrycket

$$\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$$

(där $a, b \in \mathbf{R}$) inte beror på b.

(b) Visa att

$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

för alla $x, y \in \mathbf{R}$

(4) Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{R}\backslash\{5\} \to M$, där $M \subseteq \mathbf{R}$, som är definierad enligt uttrycket

$$f(x) = \frac{6x-7}{x-5}.$$

(a) Utred vad mängden M måste vara så att f är bijektiv.

(b) Ge ett uttryck för $f^{-1}(x)$ som gäller för alla $x \in M$, där M är ditt svar till (a).

(5) Anta att en funktion $g\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ uppfyller regeln

$$g(xy) = g(x) + g(y)$$

för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

(a) Bevisa att $g(x^n) = ng(x)$ för alla $x \in (0,\infty)$ och $n \in \mathbf{Z}_+$.

(b) Bevisa att $g(x^{1/m}) = g(x)/m$ för alla $x \in (0,\infty)$ och $m \in \mathbf{Z}_+$.

(c) Bevisa att $g(x^r) = rg(x)$ för alla $x \in (0,\infty)$ och positiva rationella tal r.

(d) Bevisa att $g(1) = 0$.

(6) (a) Definiera vad det betyder att säga $\ell \in \mathbf{R}$ är en största undre begränsning till en icketom mängd $A \subseteq \mathbf{R}$.

(b) Bevisa att den största undre begränsningen till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är 6 där

$$b_n = \frac{6n^2 + 4n + 12}{n^2 + 2}$$

för varje positivt heltal n.

(7) Betrakta funktionen $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definierad enligt formeln

$$f(z) = z^2$$

för alla $z \in \mathbf{C}$.

(a) Visa att om $x > 0$, $y > 0$ och $z = x + iy$ — det vill säga, z ligger i den första kvadranten — då är $\Im(f(z)) > 0$.

(b) Betrakta $w \in \mathbf{C}$ som uppfyller olikheten $\Im(w) > 0$. Visa att ekvationen $w = f(z)$ har en lösning z som ligger i den första kvadranten.